Sume
Señor

ELEMENTOS
DE
MATEMATICAS
PUESTOS EN COMPENDIO

POR DON MANUEL AYALA,

Presbitero, Doctor en Matematicas, ex-Catedratico de las mismas en el antiguo Convictorio de San Bernardo y en el Colegio de Ciencias y Artes del Cuzco, Agrimensor y al presente Profesor de lengua Latina en la misma Capital.

PARA EL USO

DE LOS SS. OFICIALES DEL BATALLON CUZCO E IMPRESOS A EXPENSAS DE LOS MISMOS.

ARITMETICA.

SE DEDICAN

AL BENEMERITO SEÑOR CORONEL,
COMANDANTE DEL MISMO CUERPO,
DON JUAN BAUTISTA ZUBIAGA.

CUZCO 1832.

Imprenta Pública

DIRIJIDA POR EVARISTO GONZALEZ.

El Arte militar ò Ciencia de la Guerra emplea como fuerzas ò potencias los hombres, que llegan à ser aptos para el ejercicio del Arte por los *Conocimientos*, que consisten en las ciencias, que las principales deben ser las Matematicas, la Fisica, la Geografia acompañada de la Historia y los principios generales del Arte militar. *Vallejo. Tabla sinoptica del Arte militar.*

Añadimos aqui los *conocimientos (como cualidades generales á todo militar)*; y colocamos en primer lugar el de las Ciencias Matematicas, por que su estudio acostumbra nuestro espiritu al orden y à la precision; à que forme el juicio que es el instrumento universal del entendimiento, el principio de la moralidad, y la regla de las acciones humanas; y por que abre el camino à las ciencias físicas y fisico-matematicas relativas al Arte. *Idem, Trat. completo del Arte militar, pag. 7.*

SEÑOR CORONEL.

La aficion decidida, que US. tiene à las ciencias Matematicas, es una cualidad bastante demostrativa del buen talento y fino gusto que recomiendan su amable persona. Desde que US. por la mas acertada eleccion se puso à la cabeza del Batallon Cuzco, parece que no ha vivido para si, sino para procurar toda la perfeccion, de que es susceptible este ilustre cuerpo asi en lo fisico, como en lo moral. Guiado de este principio, anhela US. porque la Oficialidad y demas clases recuerden unos, y aprendan otros los elementos de las Matematicas, à fin de tener unos Militares, que, reuniendo à su notorio valor la suavidad que trahen consigo las ciencias, logren ser completos en el Arte de la Guerra. Estas prendas y por otra parte la benevolencia de US ácia mi individuo, ecsijen una demostracion de mi reconocimiento: para cumplir en lo posible esta deuda, ofrezco à US. este mi corto trabajo, que aunque en si sea pequeño, se hara apreciable si US. lo aceta. Esto es lo que pretendo, y el que US. cuente con el afecto mas sincero, que le profesa—

Su mas atento servidor y capellan.

Manuel Ayala.

PROEMIO.

El estudio de las matematicas compone uno de los principales ramos de educacion, y sin el que apenas podra llamarse un hombre literato ò ilustrado. Las Matematicas, à manera del Sol, iluminan y vivifican, dan crecimiento y movilidad à todas las Artes liberales y mecanicas, que privadas de sus beneficos rayos, yacerian marchitas y casi ineptas para fructificar. Todas las Naciones ilustradas las han cultivado, y las mas opulentas deben su riqueza mas bien à los conocimientos Matematicos aplicados à las Artes, que à las minas de plata y oro, que abrigan en su seno. En el Perú se comenzó à estudiar esta noble ciencia muy tarde, ya sea porque solo dominaba el gusto por la Teologia en todas las Escuelas, ò ya ciertamente porque el gobierno peninsular tenia abatidos los talentos peruanos. Me parece oportuno dar una tintura historica de la propagacion de las ciencias esactas en nuestra república.

El Virrey Amat fue el que plantificó por primera vez en Abril de 1766 la Catedra de Matematicas en la Universidad de San Marcos de Lima bajo la instruccion y direccion del celebre D. D. Cosme Bueno; Como los Militares deben estar especialmente imbuidos de sus principios, los oficiales y cadetes del Ejército, que se hallaba en aquella capital, fueron tambien los primeros discipulos. Desde aquella epoca se hicieron comunes en Lima los preciosos teoremas y problemas de Euclides: se oyo resonar la formula del Binomio de Newton: la Cuadratura del circulo calento à muchos la cabeza: germinaron, en suma, tantos sabios, cuales hemos admirado en los Buenos, Paredes, Morenos, Unánues, P. Romero y otros.

En Arequipa promovio su estudio el Sr. Obispo Chavez de la Rosa por medio del P. Franciscano Matraya. El Colejio Seminario de San Geronimo fue donde primero se dieron lecciones de Matematicas con tan buen exito, que ahora casi no se ve un estudiante por la calle, que no demuestre el teorema de Pitagoras, de que el cuadrado de la Hypotenusa es igual en superficie à la suma de los cuadrados de los Catetos. Asi, no nos deben admirar los progresos que han hecho en estas ciencias D. Juan de Dios Zalazar, el desgraciado Melgar, D. Juan Gualberto Baldibia, D. Tadeo Chavez y otros.

Nuestra antigua è ilustre Capital del Cuzco, no sé porque desgracia, se descuidó en imitar los bellos ejemplos que le presentaban Lima y Arequipa; sin embargo de tener tantas Catedras de Filosofia, cuyo ramo la Fisica no se puede estudiar sin las luces del Cálculo y la Geometria. Fecundo su suelo en talentos aptos para toda arte y ciencia, ¡ que adelantos no hubiese hecho en el vasto campo de las ciencias esactas! Pero no, Señor; la rutina de tantos siglos que servilmente los encadenaba; Aquel *Ergo y Atqui* embutidos à martillo, no digo en las discusiones literarias, pero aun en las conversaciones familiares: Aquel *Quœstio, utrum detur universale a parte rei* pronunciado con tono majestuoso: aquel prurito de hallar argumento y dificultad para todo, y de convencer al sustentante que lo blanco es negro y lo negro blanco, habia estragado de suerte el gusto de la juventud estudiosa, que parecia imposible hacerles sentir el agradable sabor de las Matematicas; no de otra manera, que aquellos, cuya lengua esta habituada al fuerte estimulo de los licores, detestan la dulzura de la miel; asi nuestros Escolares acostumbrados al picante del sofisma asqueaban el almibar de una demostracion cifrada en unas rayas sencillas, tan solo por que no habia lugar para meter un argumento concluyente en contra.

A pesar de estas preocupaciones, no faltaron hombres de discernimiento, que conociesen el enorme hueco que provenia à las ciencias de la ignorancia de las Matematicas. Don Francisco Rodrigues dictó algunos principios en el antiguo

Colejio de San Bernardo, pero los prejuicios ahogaron la ciencia en su misma Cuna. Para felicidad de las letras se hizo cargo de la reforma del antedicho colejio el Sr. Dr. Dn Miguel Orosco, actual Dean de esta Iglesia: esta puede llamarse la epoca de la introduccion de las bellas artes y ciencias en el Cuzco. La Musica antes vedada à los jóvenes, como corruptora de las costumbres, se enseñaba en S. Bernardo por principios: La aula de Dibujo hacía notables progresos bájo la instruccion de D. Eustaquio Rebollar: el Arte de escribir por Torquatro Torío alli hizo su especial asiento: La Gramatica Castellana y Latina se estudiaban con esmero: la Filosofia se enseñó en el lenguaje vulgar segun el voto de todos los sabios, comprendiendo por su orden estos ramos, Historia de la Filosofia, Logica depurada de las inepcias peripateticas, Arte Critica y Hermeneutica, Principios de Retorica, Metafisica. Luego à instancias del mismo Sr. Rector se siguio el estudio de las Matematicas, cuya enseñanza promovio, por cuantos medios le fueron posibles, el actual Excelentissimo Señor Presidente D. Agustin Gamarra, que á la sazon gobernaba este Departamento poco despues de haber cooperado â nuestra gloriosa independencia en la Batalla de Ayacucho.

Nunca sera bastante elojiado este célebre Cuzqueño, por su ardiente zelo en propagar la ilustracion en su paìs; pero quien mas le robaron su atencion han sido las Matematicas. Asistia de continuo à las conferencias y ecsamenes de sus diferentes ramos: Premió en distintas ocasiones al catedratico, agregando à su honorario 120 pesos por año: proporcionó libros clasicos de Matematicas al Colejio, y bájo sus auspicios se logró haber enseñado à los jovenes la Aritmetica, Algebra, Geometria, Trigonometria rectilinea, secciones cónicas, Aplicacion de la Algebra à la Geometria, Trigonometria esferica, Geografia astronomica, fisica y politica y la Mecanica.

Se principió à influjo del mismo Señor nuevo curso Matematico, que se concluyó à principios del Rectorado del D. D. Carlos Gallegos. Aqui arrancó el hilo de su vida el cultivo de las ciencias, delicias de Newton: Las Matematicas se proscribieron como fermento corruptor de la Relijion, lamentandolas al rededor de su tumba los recien iniciados en sus teoremas; Se leyeron en el Periodico Articulos comunicados contra estas ciencias, apellidandolas Semillero de Masones: Entonces se improperaba en el Colejio à los Discipulos de Euclides y Diofanto, nombrandolos por ironia *Matematicos*: parecia hallarnos en aquellos siglos barbaros, cuando apedreaban à la Doncella Hipacia, reputandola Bruja por sus conocimientos algebricos, ò cuado encarcelaban y martirizaban al Padre Rogerio Bacon como à un hechicero solo por su ciencia fisico-matematica. Sobre las ruinas de las Matematicas se entronizaron de nuevo el *Barbara Celarem* y las *Categorias de Aristoteles; el Ergotismo* volvio a meter su ruido y quebrar los Escaños con sus desmesurados golpes. Empero, pronto cesó esta tempestad, con el arribo del Señor Presidente à esta capital, ocasionado por una efimera revolucion que estalló en ella. Tubo muy à mal S. E. la estincion de la mas importante Catedra, y ordenó se renovase al momento, como de facto se cumplio con aplauso de los verdaderos sabios.

Asi es como à beneficio del Señor Presidente Gamarra van floreciendo las ciencias en el Cuzco. Gamarra en los Anales literarios del Departamento sera colocado en paralelo con Mecenas, Leon 10, Luiz 14, Cosme de Medicis y demas protectores de las letras. El mismo ejemplo de su ilustre cuñado sigue el Señor Coronel D. Juan Bautista Zubiaga, poniendo todo empeño en que estos elementos se publiquen, para comodidad è instruccion de los Estudiosos. Ojala todos se vieran animados de tan nobles sentimientos, que en pronto nuestro Cuzco seria otra Atenas; pues las ciencias para progresar no necesitan mas que la proteccion.

ELEMENTOS
DE
MATEMATICAS.
ARITMETICA.

INTRODUCCION.

1. *Matematicas son las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad. Cantidad es todo aquello que puede ser mayor ó menor ; ó todo lo que es susceptible de aumento ò diminucion ;* asi es una piedra, un monton de trigo. &c. Como la cantidad solo es susceptible de aumento ò diminucion, se sigue que las Matematicas solo podran dar medios para *espresar*, *componer y descomponer* las cantidades.

2. Las Matematicas se dividen en *puras* y *mistas*; se dicen *Puras*, *las que tratan de la cantidad con la mayor abstraccion*, esto es, sin relacion à las propiedades sensibles y fisicas y solo en cuanto es capaz de aumento ò diminucion. Se llaman *Matematicas mistas las que consideran la cantidad revestida de alguna propiedad sensible*; por ejemplo, son Matematicas mistas la *Estatica*, que trata del equilibrio de los solidos: la *Dinamica* que considera su movimiento: la *Hidrostatica*, que trata del equilibrio de los fluidos: &c.

3. La cantidad en general puede ser de dos modos, *Discreta* y *continua*: cantidad *discreta es aquella cuyas partes estan separadas unas de otras en la realidad, o segun nuestro modo de concebir*; un monton de pesos duros es cantidad discreta en la realidad, por que no tienen ninguna trabazon que

los enlaze; las piedras de una pared son cantidad discreta segun mi modo de concebir, por que aunque unidas mediante la cal, las considero como separadas ó por medio de diferentes rayas que puedo trazar con un carbon, ò por los contornos que limitan à dichas piedras.

4 *Unidad es una parte de la cantidad discreta tomada á nuestro arbitrio, para compararla con las demas de su especie. Numero es la reunion de muchas unidades de una misma especie;* en un monton de pesos duros, si tómo un solo peso para saber cuantos pesos como este hay, dicho peso sera la unidad; pero dos, tres ò diez pesos sera un numero: si quiero abreviar la cuenta, puedo hacer muchos montoncitos de à diez pesos cada uno y ver cuantos montones hay como el primitivo; entonces la unidad sera el montoncito de à diez, pero de un orden superior respecto de la unidad primitiva que fue un peso, y el numero seran ò dos, ò tres ò cuatro diezes.

5. Como la cantidad en general es discreta y continua, se sigue, que las Matematicas puras se dividen en *Calculo* y *Geometria. Calculo* es la ciencia de la cantidad discreta. El calculo es *Aritmetico* y *Algebrico*: *Calculo Algebrico es el que trata de la cantidad discreta, espresandola en cifras de valor indeterminado*, cuales son por lo comun las letras del Abecedario; v. g. para espresar cien caballos, llamaremos este numero a: mil bacas llamaremos b.

6. *Calculo Aritmetico ò Aritmetica es la ciencia que averigua las relaciones y propiedades de los numeros, espresandolos en cifras de valor fijo.* Antes de esponer el calculo aritmetico, és importantisimo espliquemos algunos terminos y signos, que usan los Matematicos.

VOCES Y SIGNOS, QUE USAN LOS MATEMATICOS.

7. *Definicion es una oracion breve que esplica lo que hay*

de obscuro en la cosa o en el nombre ; v. g. Cantidad es todo aquello que puede ser mayor ò menor.

8. *Proposicion u oracion es un juicio, en que se afirma o niega por palabras una cosa de otra*; cuando se afirma, se llama *afirmativa*, y cuando se niega, *negativa: la Aritmetica es util a todo hombre*, proposicion afirmativa; *en la Aritmetica no se enseñan cosas imposibles*, negativa.

9. *Axioma es una proposicion tan clara y evidente para todos, que no necesita demostrarse*, tales son los siguientes: 1.° *Una cosa es igual a si misma.* 2.° *El todo es igual al conjunto de sus partes*: 3.° *Lo que hagamos con el todo, quedara hecho con el conjunto de sus partes; y lo que hagamos con el conjunto de las partes, quedara hecho con el todo.* Ejemplo: si quémo un libro, se habran quemado todas sus fojas; al contrario, si quemo cada foja, quedará quemado todo el libro. 4.° *El todo es mayor que cualquiera de sus partes.* 5.° *Cosas iguales a una tercera son iguales entre si*; v. g. Quiero saber, si dos estacas A y B clavadas en diferentes sitios de una pared seran iguales; pues tomo un tercer palo con quien mido ambas estacas, si hallo que estas son iguales a la medida, debo afirmar que las estacas A y B, son iguales entre si. 6.° *Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados seran iguales.*

10. *Teorema es una proposicion, que para convencerla de verdadera, necesita de demostracion.*

11. *Demostracion es un razonamiento, por el que declaramos que dos cosas convienen entre si, por haber sido iguales a una tercera.* De aqui es, que en la demostracion se hace ver que la proposicion enunciada conviene con los axiomas, verdades demostradas y definiciones. *Demostracion indirecta ó por absurdo* es suponer la proposicion como falsa, y hacer ver los absurdos ò contradicciones, que resultan de esta suposicion ò hipotesis.

Demostrar por exhaucion es: afirmar de una parte un atributo, despues de probar que dicho atributo no conviene à las otras, siendo necesario que convenga à alguna de ellas; v. g. sea un camino que se divide en tres ramos A, B y C, unicos por donde se puede andar; quedará demostrado que mi caballo se ha ido por el A, si pruebo que no ha pisado el ramo B, ni el C.

12. *Problema es una proposicion, en que se trata de averiguar alguna verdad desconocida o hacer una operacion.* El problema consta de dos partes *Resolucion y Demostracion*; en la resolucion se dan las reglas, que se deben seguir, para hallar lo que se pretende; en la demostracion se hace ver que practicando dichas reglas, se llegará à obtener lo que se pide.

13. *Corolario ò consecuencia es una nueva proposicion, que se infiere de otra que acaba de demostrarse*, ó *de las definiciones e hipotesis.*

14. *Escolio es lo mismo que esplicacion* ò *advertencia*, y se pone donde conviene para aclarar algun punto.

15. *Postulado ò peticion es una proposicion practica, por la cual conocen todos, que se puede hacer alguna cosa sin necesidad de convencimiento*: asi es esta: En vez de un peso duro podemos tomar ocho reales ò diez y seis medios reales.

16. *Lema es una proposicion tomada de otra ciencia o tratado, con el fin de facilitar y abreviar la proposicion que se va a probar.*

17. Los signos que usan los Matematicos son estos. Para sumar el valor de dos ò mas numeros se pone este signo +, que se pronuncia *mas*; asi, para expresar que el 3 se añada al 4 se escribiran de este modo, 4 + 3, y se lee 4 *mas* 3.

18. Para restar un numero de otro se usa esta linea horizontal ——, que se lee *menos*; y quiere decir, que del numero que la antecede se rebaje el numero que la sigue; v. g. 6 — 2 se lee 6 *menos* 2.

19 Para multiplicar se usa de la cruz de San Andres ✕ ò de un solo punto (.) puesto en medio de dos numeros, y se pronuncia *multiplicado por*; v. g. 5 ✕ 4 ò 5 . 4, se leera 5 *multiplicado* por 4.

20. Estos signos ——, : se usan para partir. Los dos puntos se colocan entre el numero que se hade dividir y el otro por quien se divide; si se usa de la raya horizontal, el dividendo se pondra encima y el divisor debajo de ella, y se leera, *dividido por*; v. g. 6: 2, ò $\frac{6}{2}$ se leerá 6 *dividido por* 2.

21. El resultado de toda operacion se espresa asi, $=$, y se lee *igual a*, ò *vale*; v. g. $5 + 3 = 8$. se leerá 5 *mas* 3 *igual a* 8, ò *vale* 8.

ESPRESION O NUMERACION.

22. Con los numeros solo se pueden hacer tres cosas, *espresarlos*, *componerlos y descomponerlos*; pero segun los diferentes modos de componer y descomponer que hay, resultan seis operaciones, à saber: tres de composicion que son *Sumar*, *Multiplicar y Elevar a potencias*, y tres de descomposicion que son *Restar*, *Dividir y Estraher raices*.

23. *Numeracion* es una operacion, que dà medios, para espresar cualquier numero por palabras ò por escrito.

24. *Problema. Espresar por palabras un numero por crecido que sea.*

Resolucion. Escojase un individuo, v. g. un grano de maiz, por unidad primitiva, el cual llamaremos *uno*; agreguesele otro, y à este conjunto llamemos *dos*; à este conjunto añadasele otro, la cual reunion se llamará *tres*, y asi en adelante agregando uno, les daremos los nombres de *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, al agregado de *nueve* y *uno* llamamos *diez* o *decena*.

La *Decena* tomaremos por nueva unidad y contaremos hasta diez como lo hemos hecho antes, diciendo: *un diez*, ó diez absolutamente; dos dieces que llamamos *veinte*: tres dieces que llamamos *treinta*: cuatro dieces que llamamos *cuarenta*: cinco dieces que llamamos *cincuenta*; seis dieces, *sesenta*; siete dieces, *setenta*; ocho dieces, *ochenta*; nueve dieces, *noventa*; diez dieces, que llamamos *ciento o centena.*

Tomaremos por unidad la *centena* y contaremos hásta diez, como si fueran unidades primitivas, pero al conjunto de diez centenas llamaremos *mil o millar*; tomaremos el millar por unidad contando hasta *diez mil*; lo mismo haremos con la decena de millar contando hasta *cien mil*; el *cien mil* ó *centena de millar* nos servira de unidad y contaremos hasta díez cientos de miles, el cual conjunto llamaremos *cuento o millon.*

Se vuelve a empezar desde la unidad primitiva añadiendo la palabra *millon* a cada unidad, y cuando se llegue al millon de millones, se dira *Billon*; al millon de billones, *trillon*; al de trillones, *cuadrillon*, y asi en adelante, *quillon*, *sestillon*, *septillon*, *octillon* &c.

Escolio. Llamamos *once* el conjunto de diez y uno; *doce* al de diez y dos; *trece* al de diez y tres; *catorce* al de diez y cuatro: *quince* al diez y cinco.

Demostracion. La razon de las reglas que hemos dado no es otra que la mera convencion: su sencillez es palpable, pues con pocas palabras podemos enunciar un numero aunque sea infinito. Tambien se funda en la naturaleza el contar solo hasta diez, pues es muy verosimil que los hombre se valiesen de los diez dedos de sus manos para hacer sus cuentas, como se vio en los Peruanos antes de la conquista, segun refiere Herrera.

25. Se llama *Sistema de numeracion escrita* el conjunto de unos pocos signos, por medio de los que se puede escribir un numero por infinito que sea. Aunque cada Nacion ha

tenido su propio sistema, pero nosotros seguimos el mas perfecto, que es el *Decuplo* ò Arabigo introducido por los Arabes en España, y divulgado en toda la Europa por el Benedictino Gerberto, que despues fue Papa Silvestre 2.°

Este sistema consta de diez caracteres, que se llaman *cifras* ò *guarismos*, y son los siguientes;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Los nueve guarismos representan las palabras *uno*, *dos*, &c. el ultimo se llama *cero* y representa la nada, solo sirve para llenar los huecos donde falte algun guarismo significativo, como pronto veremos.

Todo el artificio de este sistema consiste en este:

26. *Principio fundamental. Un guarismo es diez veces mayor que el que se le sigue á la derecha.*

Esplicacion. El valor de los nueve guarismos significativos es de dos maneras, *propio* y *relativo*; *propio* es el que se ha fijado à cada uno, asi el 6 vale seis unidades, el 7 siete unidades, &c. El valor *relativo* es el que tiene un guarismo segun el lugar que ocupa contando de derecha à izquierda; es decir, que el primer lugar empezando de la derecha es de las *unidades* primitivas; el segundo de las *decenas*, el tercero el de las *centenas*, el *cuarto* el de los *millares*, el quinto de las *decenas de millar*, el sesto de las *centenas de millar*, estos seis lugares componen un periodo. El segundo periodo es de los *millones*, que tambien tiene seis lugares de los que el primero es de las *unidades* de millon, el segundo de las *decenas* &c. el tercer periodo es de los *billones*, el cuarto de los *trillones*, el quinto de los *cuadrillones* y asi en adelante. Entendido esto, tenemos suficiente para resolver el siguiente:

27. *Problema: Espresar por escrito un numero enunciado por palabras.*

Resolucion. 1.° Averiguese cuantos periodos abraza el numero enunciado; 2.° Comienzese à escribir de izquierda à derecha el primer guarismo enunciado, que siempre es de orden superior, y coloquense los demas en sus lugares respectivos, segun hemos dicho (26), poniendo cero en el lugar donde no haya unidades inferiores. Por ejemplo: Escribase el numero *Cuatro mil quinientos ocho.*

Aqui observo que este numero no pasa del primer periodo; despues escribo el 4 que como son millares, deben ocupar el cuarto lugar; por consiguiente faltan tres lugares que llenar despues del 4. Sigo escribiendo la palabra *quinientos* ò, lo que es lo mismo, *cinco cientos o centenas* que deben estar en tercer lugar, y como el 4 ocupa el cuarto lugar, pondre à continuacion el 5, y tendre 45: ahora se me sigue escribir la palabra *ocho* que son *unidades* primitivas, cuyo lugar es el primero de izquierda à derecha; pero como el numero llega hasta el cuarto lugar, sera necesario llenar con un cero el hueco de las decenas y luego colocar despues el 8, y tendremos escrito dicho numero de esta manera: 4508.

Si el numero propuesto constase de muchos periodos, al fin de cada periodo se pondra nna coma, para evitar confusion; v. g. Escribase el numero *veinticinco billones, quinientos seis mil veintidos millones, setecientos mil ochocientos tres.*

Aqui observo que el numero llega hasta el lugar de las decenas del tercer periodo, que es el segundo lugar contando de derecha à izquierda; escribo, pues, el 25 y pongo una coma. Paso despues al periodo de los millones y escribo, segun las reglas dadas, las unidades en sus lugares respectivos, pouiendo tambien una coma concluido el periodo; y asi continùo hasta escribir el periodo de las unidades primitivas, como se ve en esta espresion.

25, 506022, 700803.

Demostracion. En las reglas dadas no hemos hecho mas, que seguir el principio fundamental (26) en que se funda el sistema Arabigo, pues colocamos las unidades segun sus lugares correspondientes. La coma, que ordenamos se ponga al fin de cada periodo, solo es por comodidad, à fin de conocer con mas claridad el lugar de las unidades, decenas y asi en adelante; luego &c.

28. *Corolario.* Luego *para leer un numero escrito con muchas cifras*, podremos valernos del artificio siguiente:

Dividase el numero de tres en tres guarismos por medio de comas, empezando de la derecha; sobre el primer guarismo de la 2.ª division pongase un punto, un 1 sobre el primero de la 3.ª division, un punto sobre el de la 4.ª, un 2 sobre el de la 5.ª y asi en adelante, alternando puntos y cifras; lease, finalmente, cada division como si estubiera sola, añadiendo la voz *mil*, donde haya punto; *millon* dondo haya 1; *billon* donde haya 2, &c., como se ve en el siguiente numero:

3 . 2 . 1 .
3 , 456 , 700 , 029 , 500 , 034 , 671.

Que se lee: *Tres trillones, cuatrocientos cincuenta y seis mil setecientos billones, veintinueve mil quinientos millones, treinta y cuatro mil seiscientos setenta y uno.*

29. *Escolio.* Los Franceces al millar de millon llaman *billon*; â nuestro billon llaman *trillon* y asi en adelante. Este mismo metodo ha adoptado Avelino Diaz, Catedratico de Fisico-Matematicas en la Universidad de Buenos-Ayres.

30. Del principio sentado (26) se sigue, que *un numero queda hecho 10 veces mayor de lo que era, con solo añadirle un cero a su derecha.* Si al numero 425 le añadimos un cero, sera 4250, que es 10 veces mayor que el primitivo; La razon es, por que el 5, que antes espresaba Unides por estar eu primer lugar, por la adicion del cero queda en 2.° lugar y espresa Decenas, que son 10 veces mayores que las unidades; el 2, que antes espresaba Decenas,

por la adicion del cero queda en tercer lugar y espresa Centenas que son 10 veces mayores que las Decenas, del mismo modo discurririamos del 4 y demas guarismos que pueda haber: luego habiendose hecho cada parte diez veces mayor, lo habra quedado el todo (*Axioma* 3.°). Del mismo modo se demostraria, que añadiendo dos ceros, se hace el numero cien veces mayor: si tres ceros, mil veces: si cuatro, diez mil veces y asi en adelante.

31. *Corolario.* Luego por la razon anterior *un numero que acàba en ceros, quedara hecho* 10 *veces menor, con solo quitarle un cero de la derecha;* 100 *veces menor con quitarle dos ceros, &c;* asi, si al 1000 le separamos el cero por medio de una coma de este modo 100,0, se convertira en 100 que es 10 veces menor que mil: si le quitamos dos, sera 10,00, ò 10. A la coma se llama signo decimal, y cuando concurra la coma decimal con la coma que solo sirve para leer ò escribir un numero, esta se pondra inversa y por la parte de arriba.

SISTEMA SEPTENARIO O ROMANO.

32. Los Romanos espresaban los numeros por las siete letras del Alfabeto siguientes: C que vale *Ciento;* D ò IↃ *Quinientos;* I *Uno;* L *Cincuenta;* M ò ∞ ò CIↃ *Mil;* V *Cinco;* X *Diez.* Con estas letras diferentemente conbinadas espresaban los numeros hasta cien mil solamente. Para entender este sistema se debe tener presente: 1.° Que cuando la C se antepone à la I, ha de estar vuelta acia esta; 2.° Que una letra, si es igual o mayor que la siguiente, se suma con esta; pero si es menor que la siguiente, se resta de la que sigue. Pongamos algunos ejemplos.

II .. 2; VI .. 6; VII .. 7; XI .. 11; XV .. 15; XIX .. 19. XXX .. 30; XL .. 40; XLIX .. 49; XC .. 90; CCCC .. 400; MDCCCXXXII .. 1832; IↃↃ .. 5000; CCIↃↃ .. 10000; CCCIↃↃↃ .. 100000.

DIFERENCIAS DE LOS NUMEROS.

33. El numero se divide en *Abstracto* y *Concreto*. *Abstracto* es aquel, cuyas unidades no son de especie determinada; como 8 ù ocho veces, sin determinar que estos 8 son caballos, pesos ù hombres. Numero *concreto* es aquel, cuyas unidades son de especie determinada, como 8 pesos, 6 manzanas. Los numeros concretos son *Homogeneos* o *Heterogeneos*: *Homogeneos* son aquellos cuyas unidades son de una misma especie, tales son 7 hombres, 4 hombres; *Heterogeneos* aquellos cuyas unidades son de diferentes especies, asi son 6 pesos, 4 manzanas.

Se debe notar: 1.° Que los numeros abstractos todos son homogeneos; 2.° Que la homogeneidad de los numeros concretos depende, de que sus unidades convengan en tener aquel atributo ò propiedad, que trahemos a consideracion; v. g. Si calcúlo los hombres que hay en una casa, 3 hombres y 4 hombres seran numeros homogeneos; pero si compúto los vivientes que hay en la misma casa, 4 hombres, 6 caballos, 3 arboles serán numeros homogeneos, pues todos convienen en el atributo *viviente*.

34. A mas de esto, se divide el numero en *Entero*, *Quebrado* y *Misto*. *Entero* es el numero que consta de unidades cabales y esactas; asi son 2 pesos, 6 varas. *Quebrado* es el que solo espresa partes de la unidad que se ha elejido; tales son 3 cuartas, 4 sesmos de vara. Numero *misto* es el que se compone de entero y quebrado; v. g 4 pesos y medio, 6 varas y 3 cuartas.

El quebrado se subdivide en *Quebrado impropio* ò *Numero fraccionario* y en *Quebrado de quebrado*: *Quebrado impropio* es el que reuniendo partes de la unidad, iguala ò ecede à la unidad; asi son 3 tercios, 5 mitades. *Quebrado de quebrado* es el que espresa partes de la parte de la unidad; v. g. La mitad de una tercia de vara.

Finalmente, *Numero Digito o Simple* es el que consta de un solo guarismo, como 5, 9; *Compuesto* es el que se compone de dos ó mas guarismos, tales son 10, 250.

35. *Escolio.* Como la unidad es (4) arbitraria, se sigue, que las partes de la unidad las podemos tomar como unidades; asi podemos reputar por unidades los reales, medios reales, cuartillos &c. que son partes de un peso.

Vamos ahora à ocuparnos de las operaciones (22) que se hacen con los numeros enteros.

OPERACION DE SUMAR O ADICION.

36. *Sumar es reunir en un solo numero el valor de dos o mas numeros homogeneos:* la operacion, por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *Adicion.* Los numeros, que se dan para sumar, se llaman *Sumandos* o *Partidas*; el numero que espresa el valor de los demas se dice *Suma o Agregado.*

Problema: *Sumar numeros digitos.*

Resolucion. Sumense dos numeros, luego à esta suma agreguesele otro numero, y asi en adelante. Para hacerlo con mas facilidad tengase de memoria la siguiente;

TABLA PARA SUMAR.

1 y 1 son 2	2 y 2.. 4	3 y 3.. 6	4 y 4. 8	5 y 5. 10	6 y 6. 12
1 y 2..... 3	2 y 3.. 5	3 y 4.. 7	4 y 5.. 9	5 y 6. 11	6 y 7. 13.
1 y 3..... 4	2 y 4.. 6	3 y 5.. 8	4 y 6.. 10	5 y 7. 12	6 y 8. 14.
1 y 4..... 5	2 y 5.. 7	3 y 6.. 9	4 y 7.. 11	5 y 8. 13	6 y 9. 15
1 y 5..... 6	2 y 6.. 8	3 y 7. 10	4 y 8.. 12	5 y 9. 14.	
1 y 6..... 7	2 y 7.. 9	3 y 8. 11	4 y 9.. 13		
1 y 7..... 8	2 y 8. 10	3 y 9..12			
1 y 8..... 9	2 y 9.. 11				
1 y 9.....10					

7 y 7.....14. | 8 y 8.. 16 | 9 y 9.. 18.
7 y 8 . . 15. | 8 y 9.. 17 |
7 y 9.....16. |

37. Problema: *Sumar numeros compuestos.*

Resolucion. 1.° Colóquense los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas &c. y tirese una raya horizontal; 2.° Empiezese por la primera columna de la derecha á sumar todas las unidades, y si la suma solo se compone de unidades estas se ponen despues de la raya debajo de las unidades: si se compone de dieces cabales, se pone un cero y se guardan las decenas para sumarlas con el primer guarismo de la segunda columna: si consta de decenas y unidades, se escriben las unidades y las decenas se reservan para sumarlas con la columna de las decenas; 3.° Sumese despues la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las decenas que se guardaron, poniendo decenas cuando la suma no llega à diez: cero, cuando compone dieces justos, y si pasa de diez, escribase el numero que escede y llevese el otro para sumarlo con el primer guarismo de la columna siguiente: asi se continúa hasta llegar à la ultima columna de la izquierda, y si en esta suma resultan algunas unidades de especie superior, estas se colocarán à la izquierda del guarismo que se ha escrito debajo de la ultima columna.

Ejemplo. Sumense los numeros A, B, C. Colocadas las unidades bajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas &c, empiezo à sumar la columna derecha y digo: 8 y 5 son 13 y 2 son 15; en 15 unidades hay 1 decena y 5 unidades, pues colóco las 5 unidades debajo de la columna de unidades y llevo una decena para sumarla con la columna siguiente de de-

8 5 0 8 ..	A.
9 6 0 5 ..	B.
0 6 0 2 ..	C.
1 8 7 1 5 ..	D.

cenas : como no hay ninguna decena, escribo la unidad de decena que reservé. Páso à la tercera columna de centenas y digo : 5 y 6 son 11 y 6 son 17, pongo el 7 y llevo uno : Sumo la columna de millares de este modo : 8 y 1 que llevaba son 9 y 9, son 18, pongo 8 y el 1 coloco à la izquierda del 8.

Demostracion. Sumar es reunir en un solo numero el valor de dos ò mas numeros homogeneos (36) ; Pero los tres sumandos A, B, C hemos reunido en el numero D, pues hemos reunido todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas y en general todas las partes de que se componen los sumandos ; luego la reunion de todas estas partes espresada en el numero D espresará (*axioma* 3.ª) la reunion de los todos, que era L. Q. D. D. *Lo Que Debia Demostrarse.*

38. *Esc.* Cuando los sumandos componen columnas muy largas, será mejor separar de seis en seis sumandos : hacer sumas parciales y despues reunirlas en una suma total.

39. *Escol.* Para ecsaminar si la suma esta bien hecha, se volverá à sumar de abajo à arriba y si sale la misma suma, puede uno estar seguro de no haberse equivocado ; ò tambien se sumaran las mismas partidas, comenzando por la columna izquierda, poniendo las decenas que resulten de las sumas parciales un lugar antes : sumense, en fin, las sumas parciales con las decenas que tengan debajo. Ejemplo. Veamos si la suma D estara bien hecha.

Comienzo por la columna izquierda y digo 8 y 9 son 17 y 8 son 25, pongo el 5 debajo y el 2 un lugar antes ; páso à la otra columna y digo : 9 y 7 son 16 y 9 son 25, coloco el 5 y el 2 lo escribo un lugar antes ; sumo la columna de unidades y digo : 7 y 8 son 15 y 7 son 22, pongo el 2 y las otras dos decenas escribo un lugar antes, esto es debajo del 5. Ahora sumo de nuevo los guarismos que se hallen en

```
  8 9 7 .. A.
  9 7 8 .. B.
  8 9 7 .. C.
  ———————
2 7 7 2 .. D.
———————
2 5 5 2.
  2 2
———————
2 7 7 2
```

columna, y como resulta la misma suma 2772 que antes, concluyo que esta bien hecha.

OPERACION DE MULTIPLICAR ò multiplicacion.

40. *Multiplicar es tomar o sumar un numero tantas veces, como unidades tiene otro*; asi, si al 4 lo multiplicamos por 3, tomaremos tres veces al 4 por que el 3 tiene 3 unidades, de esta manera: $4 + 4 + 4 = 12$. La operacion por medio de la cual se ejecuta esto se llama *multiplicacion*, que solo se distingue de la adicion, en ser los sumandos iguales. El numeró que se ha de tomar ciertas veces, se llama *multiplicando*, tal es el 4; el numero, que con sus unidades espresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*, tal es el 3; lo que resulta de la operacion se llama *producto* ò *facto*, asi es el 12. El multiplicando y multiplicador juntos se llaman *producentes* ó *factores*.

41. *Corol.* El producto debe ser homogeneo con el multiplicando; porque el producto representa la suma y el multiplicando espresa los sumandos; pero los sumandos y la suma deben ser de una misma especie [36]; luego &c. El multiplicador debe ser un numero abstracto. Cuando se opera con numeros abstractos, nada importa distinguir al multiplicando del multiplicador.

42. Teorema: *El producto no se muda ya se tome el multiplicando por multiplicador, o el multiplicador por multiplicando; ó lo que es lo mismo: el orden de los factores no altera el producto.*

Demostracion. Si queremos multiplicar el 4 por 3, sumaremos el 4 tres veces; ò descomponiendo cada 4 en sus unidades las sumaremos, pues el resultado (*ax.* 3.°) sera el mismo, del modo siguiente:

Donde observamos, que la suma de los tres cuatros es igual à la suma de los cuatro treces; luego lo mismo es tomar 4 veces 3, que 3 veces 4; y como del mismo modo demostrariamos de cualquiera otro numero, resulta la verdad del teorema.

$$\begin{array}{l} 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ \hline 12 = 3 + 3 + 3 + 3 \end{array}$$

43. *Corol.* Puesto que el orden de los factores no altera el producto, se sigue, que en una operacion indicada podremos colocar los factores en el lugar que queramos; v. g. Si se me pide que multiplique 2 por 3, y que este producto lo multiplique por 5, indicaria asi: $2 \times 3 \times 5$, ó de este modo $3 \times 2 \times 5$, ò tambien asi $5 \times 3 \times 2 = 30$. Se advierte, que cuando uno ó ambos factores son numeros enlazados con el signo $+$ ò $-$, se deben encerrar dentro de un parentesis y poner el signo de multiplicacion en medio, de este modo, $(3 + 2) \times (5 - 1)$, que ejecutando es lo mismo que $5 \times 4 = 20$.

44. Problema: *Multiplicar un digito por otro digito.*

Resolucion. Tomese de memoria la tabla, que inventó Pitagoras, siguiente.

TABLA PITAGORICA.

A B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C

Para formar esta tabla, se escriben los 9 guarismos significativos desde A hasta C: despues se suma cada guarismo consigo mismo, y esta suma se coloca à derecha del primero; luego esta suma se suma con el mismo guarismo, y estotra suma se pone à continuacion de la que se tubo antes, y asi se continúa hasta llenar las nueve casillas; v. g 1 y 1 son 2, pongo el 2 despues del 1; 2 y 1 son 3 que lo pongo à continuacion del 2 &c.

Para hallar el producto de dos numeros v. g. de 4 por el 8, buscare la casilla donde concurre la fila de casîllas donde está el 4 con la fila de casillas donde se halla el 8, y el producto sera la casilla de concurso, que aqui es 32.

45. Problema: *Multiplicar un numero compuesto por un digito, o un digito por un compuesto.*

Resolucion. 1.° Tomese por multiplicando al numero compuesto y por multiplicador al digito: coloquese este debajo de las unidades del compuesto y tirese una raya por la parte inferior; 2.° Empiezese por la derecha à multiplicar el primer guarismo del multiplicando por el multiplicador, segun la tabla pitagorica, y el producto escribase despues de la raya debajo de las unidades de los factores; pero de modo, que si el producto se compone solo de unidades, estas se escribiran; si se compone de dieces justos, se pondra un cero y se reservaran las decenas para añadirlas al producto del guarismo immediato acia la izquierda: y si contiene decenas y unidades, se escribiran las unidades y las decenas se guardaran para sumarlas con el producto del guarismo siguiente; 3.° Continúese multiplicando del mismo modo todos los guarismos del numero compuesto por el digito, y escribiendo los productos parciales debajo de los guarismos del compuesto.

Ejemplo. Multipliquese el numero A por el B, que indicando sera 256×4.

Colocados los factores, como se ve en el

2 5 6	.. A
4	.. B
1 0 2 4	.. C

cuadro, empiezo à multiplicar por las unidades del multiplicando y digo: 4 veces 6 son 24, pongo el 4 debajo de las unidades de los factores y llevo 2 decenas, y prosigo: 4 veces 5 son 20 y 2 que llevaba son 22, escribo el 2 y llevo 2, y continúo diciendo: 4 veces 2 son 8 y 2 que llevaba son 10, pongo cero y el 1 coloco en un lugar antes, y tengo que 256×4. ò $4 \times 256 = 1024$.

Demostracion. Multiplicar es tomar un numero tantas veces como unidades tiene otro (40); pero en el ejemplo, que acabamos de poner, hemos tomado el multiplicando A tantas veces como unidades tiene el multiplicador B: pues hemos tomado 4 veces las unidades, 4 veces las decenas, 4 veces &c, y como hemos sumado al mismo tiempo todos los productos parciales en el numero C, resulta (*ax.* 3.°) que este sera el producto total L. Q. D. D.

46. *Escolio.* Un numero multiplicado por 1 es igual à si mismo, pues todo numero es una vez sumando; asi $4 \times 1 = 4$. Luego *a todo numero le podemos poner por factor la unidad sin que se altere*; por consiguiente lo mismo es 8 que 8×1.

47. *Esc.* Un numero multiplicado por cero es igual à cero, v. g. $3 \times 0 = 0$, ò $0 \times 3 = 0$; por que de tomar un numero ninguna vez ò de tomar muchas veces nada, resultará siempre nada.

48. *Esc.* Para multiplicar un numero por 10, 100 &c, esto es, por la unidad seguida de ceros, no hay mas que añadirle los ceros que sigan à la unidad; v. g. $25 \times 10 = 250$; $25 \times 100 = 2500$. De aqui se deduce, *que un numero acabado en ceros se puede descomponer en dos factores, uno que seran los guarismos significativos, y otro que es la unidad seguida de los ceros que tenia el numero*; asi $2500 = 25 \times 100$.

49. *Corol.* Luego para multiplicar un numero por otro que tenga un solo guarismo significativo seguido de ceros, basta multiplicar dicho numero por el guarismo significativo y

añadir al producto los ceros que hay despues del guarismo significativo ; v. g. si quiero multiplicar 46 por 200 , multiplicare el 46. por 2 y al producto 92 le añadire los dos ceros del multiplicador y sera el producto 9200. La razon es , porque descomponiendo el factor , que acaba en ceros en dos factores , tendremos que $46 \times 200 = 46 \times 2 \times 100$; aqui tenemos que multiplicar 46 por 2 que da 92 , y este producto por 100 , para lo que basta añadirle [48] dos ceros.

50. Problema : *Multiplicar un numero compuesto por otro compuesto.*

Resolucion. 1.° Tomese por multiplicador el numero que tenga menos guarismos y coloquese debajo del otro numero, de modo que las unidades esten debajo de las unidades , las decenas debajo de las decenas &c. y tirese una linea horizontal ; 2.° Multipliquese todo el multiplicando por el primer guarismo de la derecha del multiplicador (45) y escribanse los productos parciales debajo de la raya , empezando de debajo del primer guarismo del multiplicador ; 3.° Multipliquese otra vez todo el multiplicando por el segundo guarismo del multiplicador , y el producto se empezará à escribir desde el segundo guarismo del multiplicador : del mismo modo se continuará multiplicando todo el numero superior por todos los guarismos del multiplicador , poniendo los productos unos debajo de otros y empezando à escribirlos debajo de la cifra multiplicadora ; 4.° Tirese despues una raya debajo de los productos parciales , y la suma de todos ellos sera el producto total pedido.

Ejemplo. Multipliquese el numero A . . 8065 por B . . 423.

Colocado el numero menor debajo del mayor , como se ve à la margen : Comienzo à multiplicar todo el multiplicando A por el primer guarismo del multiplicador en esta forma ; 3 veces 5 son 15 , pongo el 5 debajo del 3 y lle-

```
    8 0 6 5 .. A
      4 2 3 .. B
  -------------
    2 4 1 9 5
  1 6 1 3 0
3 2 2 6 0
  -------------
3 4 1 1 4 9 5 .. C
```

vo 1 ; 3 veces 6, 18 y 1 qne lleba, 19, pongo 9 debajo de las decenas y llevo 1 ; 3 veces 0 es 0, pues pongo el 1 que llevé ; 3 veces 8, 24, pongo 4 y llevo 2 que lo escribo à la izquierda del 4.

Paso à multiplicar todo el multiplicando A por el segundo guarismo 2 del multiplicador B y digo : 2 veces 5, 10, pongo 0 debajo de la cifra multiplicadora 2 y llevo 1 ; 2 veces 6, 12 y 1 que llevaba 13, pongo 3 y llevo 1 ; 2 veces 0 es 0, escribo el 1 que llevaba ; 2 veces 8, 16, pongo 6 y 1 à su izquierda.

Multiplico despues todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador que es 4, y digo : 4 veces 5, 20, pongo 0 debajo del 4 y llevo 2 y asi continúo por todos los guarismos del multiplicando hasta el ultimo 8 : tiro la raya, sumo segun reglas todos los productos parciales, y la suma C sera el producto total pedido.

Demostracion. Segun nuestras reglas, se ha multiplicado todo el multiplicando A por las unidades, por las decenas y por las centenas, esto es, por todas las partes del multiplicador ; luego si sumamos estos productos parciales, la suma C espresará (*ax.* 3.°) el producto total. Ahora, como de multiplicar el segundo guarismo del multiplicador, que es el de decenas, por un solo guarismo del multiplicando hande resultar decenas ; deberemos principiar à escribir este producto desde el segundo lugar del producto anterior, para que se correspondan en columna las unidades de un mismo grado y se pueda hacer la suma. Comō el mismo razonamiento podemos hacer de cualesquiera otros numeros que se nos den para multiplicar, resulta L. Q. D. H. (*Hacerse*).

51. *Escol.* Cuando uno ò ambos factores acaban en cero, se abrevia la operacion, multiplicandolos, como sino hubiese tales ceros, y añadiendo al producto tantos ceros cuantos hay al fin de ambos factores juntos. Los factores se co-

tocan como se ve en los ejemplos siguientes A y B.

```
  42000                 45000
  3400                  23
 ———————— (B)          ———————— (A)
  168                   135
 126                    90
 ————————              ————————
 142800000.            1035000.
```

La razon de esta practica es, que los factores terminados en cero los podemos descomponer (48) en dos factores y entonces tendremos en el ejemplo B esta espresion: 42 × 1000 × 34 × 100, y como el orden de los factores no altera el producto, podremos indicar de esta suerte: 42 × 34 × 1000 × 100; aqui se ve que el 42 se ha de multiplicar por 34 lo qne da 1428, como este producto se debe multiplicar por 1000, bastará añadirle tres ceros [48], y debiendo tambien este nuevo producto multiplicarse por 100 le añadiremos otros dos ceros, con lo que queda demostrada nuestra practica; Lo mismo diremos del ejemplo A.

52. *Escol.* Cuando el multiplicador tiene ceros intermedios, se abrevia la operacion con solo multiplicar los guarismos significativos del multiplicador por todo el multiplicando sin hacer caso de los ceros, empezando à escribir los productos parciales debajo del guarismo multiplicador. La razon es, porque el producto parcial que resultaria de multiplicar cero por el multiplicando seria una linea de ceros, que en nada influyen en la suma, con tal que los productos se escriban debajo de la cifra multiplicadora. Vease el ejemplo siguiente.

```
     6384
     4003
 ————————
    19152
 25536
 ————————
 25555152
```

USOS DE LA MULTIPLICACION.

53. Primer uso. *Cuando se quiere aumentar o hacer cierto numero de veces mayor a un numero*, se le multiplica por el numero que con sus unidades espresa las veces que se le quiere aumentar; v. g. Si al 5 quiero hacerle 4 veces mayor *lo multiplicare por* 4, *y tendre que* 20 *sera* 4 *veces mayor* que 5 ò que le contiene 4 veces. Se debe advertir, que tomar el *duplo*, el *triplo*, el *cuadruplo*, el *quintuplo* &c. de un numero, ò que *duplicar*, *triplicar*, *cuadruplicar*, *quintuplicar*, *sestuplicar*, *centuplicar* un numero, es lo mismo que multiplicarlo por 2, 3, 4, 5, 6, 100.

54. 2.° *Cuando conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el valor de muchas*, se multiplica el valor de la unidad por el numero de ellas; v. g. ¿Cuanto valen 25 varas de paño à 2 pesos vara? Multiplicaré el numero de varas 25 por el valor de una que es 2, y el producto 50 pesos será el valor de todas.

55. *Para reducir unidades de especie superior a unidades de especie inferior*, se multiplica el numero de unidades superiores por el numero de unidades inferiores de que se compone una unidad superior. *Ejemplo*: Quiero reducir 8 varas à cuartas: vere de cuantas cuartas que son unidades inferiores, se compone una vara que es la unidad superior; y como la vara se compone de cuatro cuartas, multiplicare 8 por 4, y el numero 32 son las cuartas que hay en 8 varas.

2.° *Ejemplo*: ¿Cuantas onzas hay en 4 quintales? Aqui deberia multiplicar el numero de unidades superiores que es 4, por el numero de onzas de que se compone un quintal, que es 1600; pero como no es facil conservar en la memoria el numero de unidades inferiores de que se compone la unidad superior, cuando hay otras que intermedian; es mejor y mas comodo reducir las unidades superiores à las inmediatamente inferiores; luego estas à las unidades inferiores que las siguen y asi en adelante. En el ejemplo propuesto reducire los quintales à arrobas, las arrobas à libras, y las libras à onzas: el numero 6400 seràn las onzas que se buscan.

Para entender el ejemplo, diremos que un quintal tiene 4 arrobas; una arroba 25 libras; una libra 16 onzas: una onza 16 adarmes; un adarme 3 tomines; un tomin 12 granos.

3.° *Ejemplo para practicar por si:* Cuanto vale una arroba de plata à medio real el adarme?

4	Quint.
4	Arrob.
16	Ar.
25	Lib.
80	
32	
400	Lib.
16	Onz.
6400	Onz.

OPERACION DE RESTAR O SUSTRACCION.

56. *Restar, sustraher o rebajar es quitar un numero de otro homogeneo, para averiguar su diferencia.* El numero de quien se quita ò rebaja, se llama *Minuendo*: se dice *sustrahendo* el numero que se quita: el numero que resulta se llama *Resta*, *Ecceso* o *Diferencia.* La operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *Sustraccion.* En esta operacion indicada $5 - 3 = 2$, el 5 es el minuendo, el 3 el sustrahendo y el 2 el ecceso, resta ò diferencia.

57. Como el minuendo es un todo de quien se le quita una parte, cual es el sustrahendo; se deduce 1.° que el minuendo debe ser homogeneo con el sustrahendo; 2.° Que un numero mayor no se puede restar de un numero menor, pues de lo contrario la parte seria mayor que el todo, lo que es un absurdo; 3.° Que tampoco podemos restar de un numero otro que le sea igual, por que entonces la parte seria igual al todo, que tambien es un desproposito; de donde se sigue que no hay diferencia ò hay cero diferencia entre numeros iguales.

58. *Corolario.* Si al minuendo descomponemos en dos partes, de las que una sea igual al sustrahendo y esta parte la destruimos ò reputamos por nada, nos vendra por resta la otra parte existente; v. g. para restar de 9 el 4, descompondremos el 9 en 5 + 4, reduzcamos à 0 el 4, y tendremos 5 de resta. Luego podremos decir que *restar es destruir o tomar un numero igual al sustrahendo al contrario de lo que es.*

59 Problema: *Restar un numero de otro.*

Resolucion. 1.° Coloquese el sustrahendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas &c. y tirese una raya debajo del sustrahendo; 2.° Comienzese de la mano derecha à ver la diferencia parcial, que hay del guarismo superior al inferior y escribase el ecceso bajo de la raya, ejecutando lo mismo con las decenas, centenas, millares &c: 3.° Cuando el guarismo de arriba es menor que el de abajo, se debe tomar una unidad del guarismo significativo inmediato acia la izquierda, la cual unidad como vale 10 (26) respecto del guarismo que está à derecha, se añaden estos diez al guarismo menor y entonces se hace la resta; pero al restar el otro guarismo inmediato se le hade rebajar la unidad que se le tomó; 4.° Si el guarismo, de quien se ha de tomar la unidad de decena, fuese cero, se tomará del siguiente y si este fuese cero, se tomará del guarismo significativo que primero ocurra acia izquierda: el cero ò ceros que intermedian se consideraràn como si fueran nueves, y se rebajará una unidad del primer guarismo significativo siguiente.

Ejemplo. Vease la diferencia que hay entre los numeros A y B, que indicando sera A — B.

8	0	0	4	5	.. A
7	4	2	6	3	.. B
0	5	7	8	2	.. C.

Colocado el sustrahendo B debajo del minuendo, como se ve al lado, empiezo por las unidades y digo: quien de 5 quita 3 restan 2, escriho el 2 debajo del 3; voy à la columna siguiente de las decenas y digo: quien de 4 quita 6, no puede ser, añado 10 al 4 y son 14 y digo: quien de 14 quita 6 restan 8, pongo el 8 debajo del 6; paso à la otra columna y digo: de 9, 2, 7, escribo el 7 debajo; paso à la columna siguiente y digo: de 9, 4, 5 que escribo debajo; paso à la columna inmediata, cuyo guarismo 8 quedó en 7 por haberle tomado una unidad, y digo: de 7, 7, 0 que lo escribo, y la diferencia total será el numero C.

60. *Corol.* Cuando el guarismo, de quien se toma la unidad, es 1, quedará en 0, y para restarle se le añadira una decena como hemos dicho arriba.

Demostracion. En el modo de proceder que hemos observado arriba, hemos colocado las diferencias parciales, que hay entre las unidades, las decenas, las centenas &c. de los dos numeros propuestos A y B; y como las diferencias de cada parte reunidas en el numero C forman la diferencia de los todos (*Ax.* 3.°), se sigue, que la diferencia total queda espresada en la cantidad C, L. Q. D. D.

Ahora, en el ejemplo antecedente al restar el 6 del 4 hemos añadido diez al 4 y los dos ceros que siguen, los hemos considerado como nueves, y se ha rebajado una unidad del 8; la razon de esto es, por que para ejecutar la resta, solo necesitamos añadir una decena al guarismo menor: tomemos, pues, del guarismo 8 una unidad, la que por estar en 4.° lugar respecto del 4, valdra [26] mil ò diez centenas; dejemos 9 centenas en su columna respectiva, por no necesitarlas, y llevemos una centena: de esta rebajemos 10 y quedaran 9 decenas, que tambien las pondremos en la columna de decenas, y los 10 agregaremos al guarismo 4; luego en vez de escribir los nueves en los lugares de los ceros, podemos retenerlos en la memoria, como lo hemos hecho.

61. De la sustraccion se usa, cuando se averigua la di-

ferencia que hay entre dos numeros, v. g la que hay entre una deuda y un pago; entre el numero de años en que sucedió un hecho y el año en que nos hallamos. *Ejemplo.* Don Francisco Pizarro con sus 4 hermanos y Don Diego de Almagro entraron à conquistar el Perú en el año de 1531 (*Garcil. L. 9. C. 14*); se pregunta ¿cuantos años han corrido hasta el presente de 1832? Del año presente restaré el año de 1531, la diferencia 301 son los años corridos.

OPERACION DE DIVIDIR O DIVISION.

62. *Dividir o partir es averiguar cuantas veces un numero contiene a otro;* asi si quiero dividir 8 por 4, buscaré cuantas veces contiene el 8 al 4, y hallaré que le contiene 2 veces; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *Division.* El numero que contiene al otro ò el numero que se ha de dividir, se llama *Dividendo*: el numero que está contenido ò aquel por quien se ha de partir, se dice *Divisor*: el numero que espresa las veces que el dividendo contiene al divisor, se dice *Cuoto* ò *Cociente;* el dividendo y divisor juntos se llaman *Terminos* de la division. En esta operacion indicada 8 : 4 ò lo que es lo mismo $\frac{8}{4} = 2$, el 8 es el dividendo, el 4 el divisor y el 2 el cociente.

63. *Observacion.* Para saber cuantas veces un numero contiene à otro, v. g. el 8 el 4, lo mas obvio y natural sera sacar ò restar cuantas veces se pueda el 4 del 8 de este modo: $8 - 4 = 4$, una vez; $4 - 4 = 0$, y como se ha restado dos veces, diremos que el 8 contiene al 4 dos veces. Como esto mismo se hace por la division, se deduce, que la division se reduce à la operacion de restar, considerando al dividendo como minuendo, al divisor como sustrahendo y al cociente como el numero de restas. Tambien se infiere, que el dividendo y divisor deben ser homogeneos, pues lo son el minuendo y sustrahendo (57).

64. **Teorema:** ***El dividendo se puede considerar como un***

producto, cuyos factores son el divisor y el cociente.

Demostracion. El producto contiene tantas veces un factor como unidades tiene el otro, pues resulta de tomar tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador [40]; pero el dividendo contiene al divisor tantas veces, cuantas unidades tiene el cociente, segun lo definido; luego &c. Con efecto, $8 : 4 = 2$, y $8 = 2 \times 4$, donde vemos que el dividendo 8 es igual al cociente 2 multiplicado por el divisor 4.

65. *Corol.* Luego el problema *dividir un numero por otro* se reduce á estotro: *dado un producto y uno de sus factores, hallar el otro factor.*

66. Problema: *Dividir un numero digito por otro digito, ó un compuesto de dos cifras, pero que la cifra izquierda sea menor que el digito, dividirlo por un digito.*

Resolucion. 1.° Busquese en la tabla pitagorica un numero que multiplicado por el divisor dé un producto, que sea igual ò que mas se le aprocsime al dividendo, y el tal numero será el cociente pedido; 2.° Si el producto de multiplicar el cociente por el divisor fuese menor que el dividendo, se restará de este: la resta se escribira con el signo + al lado del cociente, se le tirará una raya por debajo, y se escribira el divisor debajo de la raya.

Ejemplo. Dividase 12 por 4; busco un numero, que multiplicado por 4 produzca 12, y como este es el 3, pues $3 \times 4 = 12$, digo que el cociente es 3.

Ejemplo 2.° Dividanse 16 varas entre 6 hombres: busco un numero que multiplicado por 6 produzca el 16, y digo: 1 vez 6 es 6, este producto es menor que el dividendo; pues continúo: 2 veces 6 son 12, que tampoco es igual al dividendo; prosigo: 3 veces 6 son 18, aqui el 18 es mayor que el dividendo 16 y por lo mismo el factor 3 no es el cociente. Pondre, pues, por cociente 2 por que da un producto 12 que mas se aprocsima al 16; veo la diferencia de estos dos numeros y digo: de 12 a 16 van 4, pongo el 4 à la derecha del cociente 2, le tiro una raya y escribo debajo de esta el divisor 6, segun se ve aqui indicado, $16 : 6 = 2 + \frac{4}{6}$, esto es que 16 varas dividas entre 6 hombres, les cabe á dos varas cabales mas cuatro sesmos de vara.

Si los residuos estubieran escritos de esta manera: $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{3}{10}$, se leerian asi: *un segundo o un medio*, *dos tercios*, *tres quintos*, *cuatro sesmos*, *un septimo*, *tres ochavos*, *cinco catorce avos*, *tres decimos* Cuando el numero que esta debajo de la raya es 1 seguido de ceros, se le añade la palabra *esimo;* pero si el numero es otro cualquiera compuesto, se le añade la voz *avo.*

Demostracion. La primera regla es clara, pues se funda en el teorema [64]; la razon por que la resta se debe poner al lado del cociente, y el divisor debajo, es esta.

Como debemos repartir por igual todas las 16 varas à lòs 6 hombres, las 4 que sobran no las hemos de botar à la calle; será, pues, indispensable que cada una de estas la descompongamos en seis trozos iguales llamados *sesmos*, y demos á cada hombre un sesmo por cada vara; pero las varas son 4; luego á cada hombre tocarán 4 sesmos de vara. Ahora, como la sesta parte de cada unidad es igual (*ax.* 3.°) á la sesta parte del todo, se sigue que á cada hombre le cabrá la sesta parte del 4 que es el todo; pero tomar la 6ª parte del 4 equivale á dividir 4 por 6, operacion que se indica poniendo una raya debajo del 4 y despues de aquella el 6: luego el cociente de dividir la resta por el divisor, se espresará poniendo dicha resta encima de una raya y debajo de ella el divisor, L. Q. D. D.

67. *Corol.* De la demostracion anterior se sigue; 1.° *Que el cociente de dividir un numero menor por otro mayor es un numero quebrado*, pues solo espresa (34) partes de la unidad,

tal es el 4 sesmos. 2.° Que en jeneral *el cociente de dividir un numero cualquiera por otro, se puede espresar poniendo el dividendo encima de una raya y debajo de esta el divisor;* pero entonces el cociente no espresará unidades del dividendo, sino partes en que se ha descompuesto la unidad, conteniendo esta tantas cuantas unidades tiene el divisor: es decir, que si el divisor es 2, el cociente espresará medios; si es 3, espresará tercios &c. Por ejemplo, si se me pide que divida 4 pesos entre 4 hombres, diré que les cabe á cuatro cuartos de peso ò á $\frac{4}{4}$; 25 dividido por 3 da de cociente $\frac{25}{3}$. La razon de esto es, por qne podemos descomponer cada unidad de un dividendo cualquiera en tantas partes, como unidades tiene el divisor, y espresar el cociente del mismo modo que hicimos al dividir el 4 por 6.

68. *Escol.* Se nos puede tachar de inesactos, cuando hemos puesto por dividendo varas, por divisor hombres y por cociente varas; pues el divisor debia espresar (63) varas y el cociente ser un numero abstracto. Para satisfacer, me valdre de este ejemplo llano: Averiguese cuentas veces 6 pesos contiene á 2 pesos; del 6 quitaré 2 pesos; se si mandara que distribuya estos dos pesos á dos hombres, cada uno llavará un peso en la primera resta: del residuo 4 pesos vuelvo á quitar 2 pesos, que tambien destribuyo á peso á cada hombre ejecutando la tercera resta, tocará otro peso á cada hombre. Aqui observo que el sustrahendo ó divisor 2 pesos es igual al numero de hombres que es 2, y que el numero de restas ò el cociente 3 es igual al numero de varas que lleva cada hombre; luego se me puede conceder á manera de postulado, que en vez de decir 2 pesos diga 2 hombres, y en vez de decir hay 3 restas diga hay 3 varas; no envuelve pues inesactitud la denominacion que hemos dado el divisor y cociente.

69. Prob'ema : *Dividir un numero compuesto por un digito*

Resolucion. 1.° Coloquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo renglon; tirese entre los dos una raya de arriba abajo y otra horizontal debajo del divisor. 2.° Separese con una coma el primer guarismo de izquierda del dividendo, y si este es menor que el divisor, separense dos: dividase lo separado acia izquierda por el divisor segun lo dicho [66], pongase el cociente debajo de la raya que esta inferior al divisor, y el producto de multiplicar el cociente por el divisor restese del dividendo parcial, que es el guarismo ò guarismos separados acia la izquierda. 3.° Al lado de la resta ò al lado del cero, sino quedó ninguna, se baja el guarismo siguiente del dividendo: se ve cuantas veces en este guarismo esta contenido el divisor, y el cociente se pone á la derecha del cociente parcial anterior; se multiplica este segundo cociente por el divirsor y el producto se resta del segundo dividendo parcial. Si siendo cero la resta, en el guarismo que se baja no cabe el divisor, se pondrá desde luego un cero en el cociente y se bajará otro guarismo del dividendo total, que se pondra al lado del que ya bajamos: 4.° Asi se continúa operando, hasta haber bajado el ultimo guarismo del dividendo, y la ultima resta que resulte, se coloca á derecha del cociente, se le tirará por debajo una raya y debajo de esta se pondra el divisor.

Ejemplo. Dividase 24636 por 6.

Colocados los terminos como se vé al margen, separo con la coma los dos guarismos 24 de la izquierda del dividendo, por que en el primero 2 no cabe el divisor 6, y digo: ¿6 en 24 cuantas veces cabe? Veo (66) que cabe 4 veces, pues pongo 4 debajo del divisor; multiplico el cociente 4 por

```
A... 2 4, 6, 3, 6, | 6. . . .B
     2 4           | ————
  ———————————      | 4106.C
       0 0 6
           6
  ———————————
         0 3 6
           3 6
  ———————————
           0 0
```

diciendo: 4 veces 6 son 24, que coloco debajo del dividendo parcial 24, y resto. Al lado de la resta O bajo el 6 y lo separo con una coma y digo: 6 en el 6 cabe una vez, pongo 1 al lado del 4; multiplico y digo: 1 vez 6 es 6, pongo este producto debajo del 6 y resto. Al lado de la resta O bajo el guarismo 3 y digo: 6 en 3 no cabe, pues escribo O en el cociente y bajo el último guarismo 6 que lo escribo al lado del 3 y digo: 6 en 36 ¿Cuantas veces? Veo que cabe 6 veces, pues coloco 6 en el cociente; multiplico y digo: 6 veces 6 son 36, coloco este producto debajo del dividendo parcial 36, resto y como me resulta O de diferencia, concluyo que 24636 contiene 4106 veces al 6.

Demostracion. Lo que se hace con cada una de las partes, queda hecho con el todo (*Ax.* 3.º); pero cada parte del dividendo A hemos dividido por B, y los cocientes parciales hemos reunido en C; luego C espresará el cociente total.

Que cada parte del dividendo A se haya dividido por B, es constante, con solo observar el metodo que hemos seguido. Con efecto, el dividendo 24636 lo podemos descomponer en 2 *decenas de millar* + 4 *millares* + 6 *centenas* + 3 *decenas* + 6 *unidades*, que para mayor claridad supondremos que son pesos, y el divisor represente hombres. Como 2 decenas de millar repartidas á los 6 hombres no les cabe á decena de millar cabal, las reducimos á millares y son 20; á estos 20 millares reunimos los 4 millares por ser unidades de un mismo grado, y tendremos 24 millares que divididos por 6, dan 4 de cociente; por ser estas 4 unidades de millar, deberan escribirse (26) en el cuarto lugar contando de derecha á izquierda, que segun nuestro modo de escribir, debe ser el primero de izquierda á derecha. Ahora, multiplicamos este cociente por el divisor y le restamos del dividendo parcial 24, para ver las unidades que pueden sobrar. Como no sobió ningun millar, bajamos las 6 centenas y dividimos por 6, el cociente 1 centena debe estar en tercer lugar y por esto lo colocamos á la derecha del cociente 4; el cociente lo multiplicamos por el divisor y restamos, para ver las centenas que puedan sobrar, y reunirlas con las otras 3 decenas, que por esta razon las bajamos al lado de la resta: 3 decenas divididas entre 6, no puede caberles à decena, ó les cabe cero decena, pondremos pues 0 decenas en el cociente. Las 3 decenas reducimos á 30 unidades, pero como hay ademas 6 unidades, las bajamos para sumarlas con las 30, y componen 36 unidades primitivas; Como el 6 cabe 6 veces en 36, pondremos el cociente 6 en el lugar de las unidades, multiplicamos y restamos, y nada sobra. El razonamiento, que acabamos de hacer, lo podremos aplicar á cualquier otro ejemplo, y por consiguiente resulta L. Q. D. D.

70 *Escolio.* 1.° Un numero dividido por si mismo da de cociente 1, v. g. 6 : 6 = 1; por que todo numero se contiene una vez á si mismo. 2.° Un numero dividido por 1, da de cociente el mismo número, asi 4 : 1 = 4; por que un numero debe contener tantas veces la unidad, cuantas espresa el mismo; de aqui se deduce que *a todo numero se le puede poner la unidad por divisor*, *sin que se altere su valor*. 3.° Cero dividido por un numero, ò un numero dividido por cero, da de cociente cero. 4.° En un cociente parcial no se puede poner mas de 9, ora el dividendo y el divisor tengan un mismo numero de guarismos, ora el dividendo tenga un guarismo mas.

Si ambos terminos tienen un mismo numero de guarismos, supondremos que el dividendo sea 9 y el divisor 1; Si 1 cupiera en 9 diez veces, el cociente 10 multiplicado por el divisor 1, daria de producto 10, que es mayor que el dividendo 9; lo que es un absurdo.

Si el dividendo tiene dos guarismos y el divisor uno, supondremos que aquel sea 89 y este 9; si el cociente fuera

10, tendriamos que $10 \times 89 = 890$, lo que es un absurdo; por que el producto del cociente por el divisor, nunca debe ser mayor que el dividendo. *Luego &c.*

71. Problema. *Dividir un numero compuesto por otro compuesto.*

Resolucion. Despues de haber colocado el dividendo y divisor, segun se ha enseñado atras; 1.° Tómese del dividendo, empezando de la izquierda, tantos guarismos, cuantos tiene el divisor y sepárense con una coma; pero si lo separado es un numero menor que el divisor, se tomará otro guarismo mas: 2.° Vease cuantas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primer guarismo de la izquierda del dividendo parcial, ó en los dos primeros, si ácaso en el dividendo se tomó un guarismo mas de los que tenia el divisor; el numero de veces que está contenido, se pone en el cociente; se multiplica este cociente por todo el divisor, y el producto se coloca debajo del dividendo parcial y se resta de él: 3.° Al lado de la resta se baja el siguiente guarismo del dividendo total, y se ve si este dividendo parcial es igual ò mayor que el divisor: siendolo, se vera cuantas veces el primer guarismo izquierdo del divisor se contiene en el primer guarismo izquierdo de dividendo, ò en los dos primeros, si el dividendo parcial tiene un guarismo mas que el divisor; el numero de veces se pondra en el cociente, este se multiplicará por todo el divisor, el producto se restará: pero si despues de bajado el guarismo y sumado con la resta, este numero es menor que el divisor; se pondra cero en el cociente y se bajará otro guarismo mas del dividendo total, y se hara lo mismo que hemos dicho antes, hasta haber bajado el último guarismo del dividendo total. Si hay resta, se pone à derecha del cociente con una raya debajo y despues de esta todo el divisor.

```
A .. 1 0 7 , 5 , | 4 3 .. B
       8 6       | -------
     ---------   | 2 5 .. C
     0 2 1 5
       2 1 5
     ---------
       0 0 0.
```

Ejemplo. Dividase 1075 por 43. Tomo por dividendo parcial los tres primeros guarismos 107, por que tomando los dos, resulta el dividendo parcial 10 menor que el divisor 43. Ahora, veo cuantas veces el primer guarismo izquierdo 4 se contiene en los dos primeros, que son 10, por que el dividendo parcial tiene un guarismo mas que el divisor; el cociente 2 lo escribo en su lugar, lo multiplico por 43, y el producto 86 lo resto de 107. Al lado de la resta 21 bajo el guarismo 5 señalandole con una coma, y tengo 215 por segundo dividendo parcial; como este dividendo tiene un guarismo mas que el divisor, averiguo cuantas veces cabe el 4 en los dos primeros guarismos que son 21, y hallo que cabe 5 veces; pongo el 5 à continuacion del cociente 2, multiplico 43 por 5, el producto 215 resto del dividendo parcial, y como me da cero diferencia, digo que el cociente pedido es 25 unidades.

```
468,7,9,3, | 234
468        | ---------
---------- | 2003 + 91
000 7 9 3          ---
    7 0 2          234
    -----
    0 9 1
```

Ejemplo 2.° Vease cuantas veces el numero 468793 contiene al 234.

Separo tres guarismos de la izquierda del dividendo por que otros tantos tiene el divisor, y digo: 2 en 4 cabe 2 veces, pongo 2 en el cociente; multiplico el 2 por todo el divisor, y el producto 468 le resto del dividendo parcial. Al lado de la resta 0 bajo el 7 separandolo con la coma, y como el 7 es menor que el divisor, pongo 0 en el cociente y bajo el guarismo siguiente 9 à continuacion del 7; el dividendo parcial 79 todabia es menor que el divisor, pues pongo 0 en el cociente y bajo el último guarismo 3, lo que me da 793 por dividendo parcial; como este numero contiene al divisor, digo: el 2 en el 7 cabe 3 veces, pongo 3 en el cociente, le multiplico por el divisor, el producto 702 resto del dividendo parcial y la resta final 91 coloco á continuacion del cociente, tirando por debajo una raya y bajo de ella todo el divisor, con lo que he concluido mi operacion. Digo, pues, que el cociente pedido es 2003 unidades + 71 doscientos treinta y cuatro avos de unidad.

Demostracion. Es la misma que dimos para la resolucion del problema [69].

72. *Escolio.* En la division de un numero compuesto por otro compuesto, hemos dicho que se ponga por cociente el numero de veces que el primer guarismo del divisor se contiene en el primero ò dos primeros del dividendo parcial; pero este cociente no siempre es el verdadero, pues las mas veces es mayor y algunas por descuido se suele poner menor. Para conocer si el cociente es mayor que el verdadero, daremos esta regla: *El cociente es mayor de lo que debe ser, cuando multiplicado por el divisor da un producto mayor que el dividendo parcial*, en este caso debera rebajarse del cociente una ò mas unidades. Para conocer si el cociente es menor que el verdadero daremos estotra regla: *el cociente es menor que el verdadero, cuando multiplicado por el divisor y restado este producto del dividendo parcial, la resta es igual o mayor que el divisor;* por manera que dicha resta siempre debe ser menor que el divisor, y en caso contrario, se añadiran al cociente una ò mas unidades.

Para no llenar papel ni gastar mucho tiempo en las tentativas de añadir ò quitar muchas veces la unidad al cociente, observese esta regla: *el cociente hallado multipliquese mentalmente, sin escribirlo, por los dos primeros guarismos de la izquierda del divisor, y vease si este producto no es mayor que* *los dos o tres primeros guarismos de izquierda del dividendo; no siendolo, el cociente no sera mayor, que es lo que mas sucede.*

Si el 2.° guarismo del divisor fuera 7, 8, ò 9, podemos evitar muchas tentativas, si al primer guarismo de la izquierda del divisor le añadimos mentalmente una unidad, y asi aumentado vemos cuantas veces cabe en el primero ò dos primeros guarismos del dividendo.

73. Como hacer à un numero 10, 100 &c veces menor es dividirlo por 10, 100 &c; se sigue que *para dividir un numero por la unidad seguida de ceros, no habra mas que hacer (31), sino separarle con la coma decimal de la derecha tantos guarismos como ceros hay despues de la unidad, y poner debajo del guarismo o guarismos separados acia la derecha el divisor, o bien retenerlo en la memoria.* Por ejemplo. Si se me pide que divida 46538 por 10, tendre el cociente 4653, $\frac{8}{10}$; si por 100, sera 465, $\frac{58}{100}$; si por 1000, sera igual â 46, 538; en esta última espresion no pongo el divisor 1000 debajo de los guarismos separados á derecha, por que lo sobrentiendo.

ABREVIACION DEL DIVIDIR.

74. Hay dos medios de abreviar la division, uno general y otro particular en ciertos casos. La abreviacion general consiste en que al mismo tiempo de multiplicar el cociente por cada guarismo del divisor, se haga la resta del dividendo parcial, sin escribir el producto y solo reteniendo mentalmente las decenas para juntarlas con el producto correspondiente.

Los casos particulares de abreviacion son: 1.° *Cuando el dividendo y divisor acaban en uno o mas ceros; se borra en ambos terminos igual numero de ceros, y se ejecuta la operacion con los guarismos que quedaren.* V. g Dividase 2700 por 2500. Borro ò tacho dos ceros en cada termino, y quedan reducidos à 27 dividido por 25; ejecuto la operacion y tengo el cociente $1 + \frac{2}{25}$, el mismo que obtendria sino se hubiesen borrado los ceros.

La razon de esto es, que un numero de unidades contiene à otro número de unidades del mismo orden, las mismas veces que si las unidades de dichos dos numeros fueran de un mismo orden cualquiera, superior ò inferior; asi, tantas veces contienen 8 unidades primitivas à 2 unidades tambien primitivas, como 8 decenas à 2 decenas, como 8 centenas à 2 centenas, como 8 millones à 2 millones, pues siempre resultará el cociente abstracto 2. Ahora, en el ejemplo anterior al borrar dos ceros en 2700 lo reducimos à 27 centenas, y al borrarlos en 2500 lo reducimos à 25 centenas; luego dividiendo estos dos numeros, cuyas unidades son de un mismo orden superior, resultara el mismo cociente, que si fueran de orden inferior.

2.° Caso particular. *Cuando solo el divisor termina en ceros, estos se le separan con un parentesis inicial, y tambien se separan de la derecha del dividendo tantos guarismos, como ceros hay en el divisor: se ejecuta la division con los guarismos que quedan a izquierda; si hay resta final, se pondran a su derecha los guarismos que se separaron del dividendo, colocando esta suma en el cociente y debajo de ella todo el divisor.* Vease el ejemplo adjunto.

$$\begin{array}{l|l} 32(56 & 9(00 \\ \cline{2-2} 27 & 3 + \frac{556}{900} \\ \cline{1-1} 05 & \end{array}$$

La razon de esta practica es, que podemos descoponer el dividendo 3256 en estas dos partes 3200 + 56 y dividir cada una por 900; ejecutando la division de la primera parte por la abreviacion del primer caso particular, tendremos el cociente 3 y sobrarán 5 centenas: estas 5 centenas deberemos reunir con las 56 unidades, lo que nos da 556 unidades, y dividir esta suma por 900 cuyo cociente (67) es $\frac{356}{900}$.

USOS DE LA DIVISION.

75. Uso 1.° *Averiguar de cuantas veces un numero dado se compone otro, o cuantas veces un numero se contiene en otro.* Se resolverá, dividiendo el numero continente por el contenido; v. g. ¿De cuantos 6 se compone el 32? Divido 32 por 6 y el cociente $5 + \frac{2}{6}$ me dice, que el 32 se compone de cinco seises + dos sestas partes de seis. En esta cuestion el divisor es la unidad, el dividendo la reunion de unidades iguales cada una al divisor, y por lo mismo el cociente quebrado espresará partes de la unidad cual es el divisor. Si la cuestion fuera esta: ¿Cuantas veces el 6 se contiene en 32? Responderia que se contiene 5 veces cabales mas 2 sesmos de vez.

2.° *Repartir cierto numero de cosas, como pesos, varas, entre varias personas.* Se dividirá el numero de cosas por el numero de personas, segun se ejecutó en el 2.° ejemplo del parrafo (66).

3.° *Dividir un numero en partes iguales, o tomar de un numero una parte determinada, tal como la mitad, la tercia, la cuarta, la vigesima, &c.* Se dividirá el numero por aquel que con sus unidades señala las partes iguales, en que se quiere repartir, ò la parte que se quiere tomar; v. g. Tómese la 6.ª parte de 30; dividire 30 por 6 y el cociente 5 sera la sesta parte pedida.

4.° *Dado el valor de muchas unidades, hallar el valor de una.* El valor de las unidades se dividira por el numero de ellas, y el cociente sera el valor de cada una; v. g. 5 varas de paño costaron 80 pesos, ¿cuanto costó cada vara? Dividire el valor 80 por el numero de unidades 5, el cociente 16 pesos sera el precio de una vara. *Ejemplo 2.°* Un caballo, que anda uniformemente, andubo en 9 dias 72 leguas; se trata de saber cuantas andubo en un dia. Divido el valor de las unidades, que es 72, por el numero de ellas que es 9, y el cociente 8 determina las leguas que andubo por dia.

La razon de esta practica es, que el valor total 80 pesos del primer ejemplo proviene de haber tomado tantas veces el valor de cada vara, cuantas varas son; pero son 5 las varas, luego 80 pesos proviene de multiplicar 5 por el valor pedido de cada vara. Y como dado un producto y uno de sus factores, hallamos (64) el otro factor, dividiendo el producto por el factor dado, se deduce L. Q. D. D.

5.° *Reducir unidades inferiores a unidades superiores*, como reales à pesos, varas à leguas, libras à arrobas &c. Averiguese de cuantas unidades inferiores se compone ò consta la unidad superior, y el numero dado de unidades inferiores partase por el numero de veces que la unidad inferior cabe en la superior. *Ejemplo*: ¿ Cuantos pesos componen 8004 reales? Como el peso consta de 8 reales, divido 8004 por 8; el cociente 1000 mas 4 ochavos de peso seran los pesos buscados. Se advierte, que si hay alguna resta, el numero que està debajo de ella espresará partes de la unidad superior, no de la inferior.

La razon de nuestra practica es, que podemos tomar 8 reales por unidad, y preguntar de cuantas unidades, como esta, se compone el numero 8004 reales; cuestion que pertenece al *uso* 1.°, y por consiguiente debe resolverse del mismo modo.

Escolio. Cuando las unidades inferiores son muy pequeñas, es dificil saber con prontitud, cual es el numero de unidades inferiores de que consta la superior, para hacer la division. Por tanto, para facilitar el cálculo, se reduciran las unidades inferiores dadas à las inmediatamente superiores; estas à las superiores que las sigan, y asi en adelante hasta llegar à las que buscamos. *Ejemplo*: 544 medios reales quiero reducir à onzas de oro. Primero reduciré los medios à reales, luego los reales à pesos, y despues los pesos à onzas, advirtiendo que la onza vale en el Perú 17 pesos duros, segun se ve en el siguiente prospecto.

5,4,4, *medios*	2				
14		8			
04	27,2 reales			17	
0	32	34 pesos			
	0	00		2 onzas de oro.	

76. Uso 6.° *Hallar todos los numeros, que puedan dividir esactamente a otro numero dado.* Para resolver este problema, antepondremos algunas definiciones y observaciones.

Definiciones. *Multiplo* de un numero, es el que le contiene un numero ecsacto de veces, asi 8 es multiplo de 4, por que le contiene dos veces cabales. *Submultiplo* ò parte alícuota de un numero, es el que está contenido en dicho numero algunas veces cabales; asi el 4 es submultiplo del 8 Cuando un numero contiene à otro 2, 3, 4, 5, 10, &c veces, se dice *duplo*, *triplo*, *cuadruplo*, *quintuplo*, *decuplo* &c del contenido, y este respecto del continente se nombra *subduplo*, *subtriplo*, *subcuadruplo*, *subquintuplo*, *subdecuplo* &c.

La parte alícuota tambien se llama *divisor* y *factor*; divisor, qor que divide ecsactamente al numero cuya parte es; factor, por que el divisor y el cociente son (64) los factores del dividendo. *Parte alicuanta* de un numero, es la que no se contiene veces cabales en él, asi el 3 es parte alicuanta del 8.

Factor o divisor simple o numero primo es el que proviene de multiplicar un numero por sola la unidad; asi son factores simples 2, 3, 5, 7, 11, 13, &c.; *factor compuesto* es el que proviene de multiplicar dos ò mas numeros entre si, tal es el 6, que proviene de multiplicar 2 por 3.

77. Observaciones. *Todo numero que acaba en cero o gua-*

rismo par, *es divisible por* 2 ; v. g 64 es divisible por 2, porque el 4 es guarismo par ; 40 es divisible por 2, porque termina en cero. La razon es, porque si el numero termina en cero, se compondrá de decenas esactas ; pero cada decena se puede partir por 2, por ser dupla de 5 ; luego el numero se podra partir tambien por 2. Si el guarismo de las unidades es par, se podra dividir el numero en dos partes iguales, pues esto quiere decir par.

78. *Un numero es divisible por* 3, *cuando la suma de todos sus guarismos, considerados como unidades, da* 3 *o un multiplo de* 3 ; asi estos numeros 15, 1272, son divisibles esactamente por 3, por que si sumo los dos guarismos 1 y 5 del primer numero, resulta 6 que es multiplo de 3 ; y sumando los guarismos 1, 2, 7, 2 del segundo numero, resulta 12, que tambien es multiplo de 3.

La razon de esto es, porque si el numero 15 descomponemos en partes que sean divisibles por 3, tendremos $15 = 9 + 1 + 5 = 9 + 6$; pero cada parte 9 y 6 es divisible por 3, por ser multiplos de este ; luego tambien el todo 15 se podra dividir por 3.

79. *Si el ultimo guarismo de un numero es* 0 *o* 5, *dicho numero se podra dividir por* 5, asi, estos numeros 20, 35 son divisibles por 5. La razon es, por que si descomponemos ambos numeros en partes que sean divisibles por 5, tendremos $20 = 10 + 10 = 5 + 5 + 5 + 5$; y $35 = 10 + 10 + 10 + 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$; pero cada una de las partes de estos numeros es divisible por 5 : luego tambien lo seran los todos.

Para saber, si un numero es divisible por 7, la regla es mas complicada, y por eso la omitimos.

Un numero es divisible esactamente por 11, *cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar, es cero o multiplo de*

11. Asi, 5346 es divisible por 11, porque sumando las cifras 6 y 3 que estan en lugar impar, comenzando de derecha à izquierda, resulta la suma 9; y sumando los guarismos 4 y 5 que estan en lugares pares, dan de suma tambien 9, cuya diferencia es 0. La demostracion no se pone por ser engorrosa: vease à Vallejo de ultima edicion.

Entendido esto, resolvamos ya el problema anterior, enunciandolo en estos terminos:

80. Problema: *Hallar los factores simples y compuestos de un número dado.*

Resolucion. Dividase el numero por 2 todas las veces que se pueda, teniendo presentes las observaciones (77 &c); despues por 3 cuantas veces se pueda; luego por 5, despues por 7 &c y se tendran los factores *primos* o *simples.* Para obtener los factores *compuestos de dos simples*, se multiplicará el primer factor simple por todos los que le siguen; despues el segundo por todos los siguientes, el tercero por todos los que siguen, &c, y los productos seran los factores compuestos de dos simples. Para formar los factores *compuestos de tres simples*, multipliquese el primer simple por el producto de los dos que siguen; el segundo por el producto de los otros dos siguientes, y asi en adelante. Los factores *compuestos de cuatro simples* se forman, multiplicando el primer simple por el producto de los tres simples siguientes, despues el segundo simple por el producto de los tres siguientes &c., y asi succesivamente hasta haber multiplicado todos los factores simples entre si, cuyo ultimo producto siempre sera igual al numero propuesto.

Se hade advertir, que cuando se repiten los factores simples, y se multiplican de dos en dos para formar los factores compuestos de à dos, no se ha de poner dos veces el mismo producto; sino solo el primero que se formó.

Ejemplo. Averiguemos los factores asi simples como compuestos del numero 180.

Coloco el 180 lo mas arriba y acia la izquierda de la pizarra ò papel en que se practica: tiro una raya de arriba abajo à su derecha, y pongo su divisor à la frente, haciendo lo mismo al dividir los cocientes, como se ve aqui:

180	2	(2)	(3)	(4)	(5)
90	2	4.			
45	3	6. . .	12		
15	3	9 . .	18 . .	36	
5	5	10; 15	20; 30; 45	60, 90	180
1					

Y como el 180 acaba en 0, conozco que es divisible por 2, que lo coloco al frente despues de la raya y hago la division abreviadamente, diciendo; mitad de 1, no puede ser, tomo los dos primeros guarismos y digo: mitad de 18 es 9, que pongo debajo del 8, y nada me sobra, despues digo: mitad de 0 es 0, que pongo à continuacion del 9, y tengo por cociente 90. Ahora veo por que numero es divisible el 90, y como acaba en 0 es divisible por 2: coloco el 2 enfrente, haciendo la division abreviada, pongo el cociente 45 debajo del 90. Como el 45 no es divisible por 2, veo si lo es por 3, diciendo; 4 y 5 son 9, y como el 9 es multiplo de 3, divido el 45 por 3, poniendo este enfrente de aquel: hecha la division abreviada, coloco el cociente 15 debajo del 45. El 15 todabia es divisible por 3, por que 1 y 5 son 6, que es múltiplo de 3; pues hago la division y pongo debajo el cociente 5. Ahora, el 5 no es divisible por 3, pero lo es por si mismo; por tanto pongo el 5 enfrente, y hecha la division abreviada, coloco el cociente 1 debajo y tengo los factores simples 2, 2, 3, 3, 5.

Para hallar los compuestos de à dos factores simples, tiraré una raya de arriba abajo, â la derecha de los simples; multiplicaré el primer factor 2 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 2 por 2 son 4, que pongo à la derecha de la raya enfrente del segundo 2, que es por el que he multiplicado; despues digo: 2 por 3 son 6, que pongo enfrente del primer 3, que es por el que he multiplicado; despues deberé decir: 2 por 3, pero como el producto del 2 por este segundo 3, será el mismo que el del primero, no lo ejecuto y paso à multiplicar el 2 por el 5, diciendo: 2 por 5 son 10 que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado. Ahora deberia multiplicar el segundo 2 por todos los que tiene debajo de sí; pero como de estos productos me resultarian los mismos que ya tengo apuntados, escuso el hacer la operacion. Paso despues à multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo de sí, diciendo: 3 por 3 son 9, que pongo enfrente del 3 segundo, que es por el que multipliqué, y por consiguiente en un lugar vacío que me habrá quedado entre el 6 y el 10 que ya tenia; continúo diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente à la derecha del 10; como de multiplicar el segundo 3 por el 5 que tiene debajo, me resultará 15 que ya tengo, omito esta operacion y paso á sacar los compuestos de à tres.

Para esto, despues de tirada la raya multiplicaré el 4, primer factor compuesto de à dos, por todos los simples que tenga debajo de sí, esto es, por todos los simples que estan debajo del renglon donde se halla el 4, diciendo: 4 por 3 son 12, que pongo enfrente del primer 3, que es por el que he multiplicado; luego, como de la multiplicacion del mismo 4 por el 2.° 3 me resultaria el 12 qne ya tengo, omito esta operacion y paso á multiplicar el 4 por el 5, diciendo 4 por 5 son 20, que pongo enfrente del 5; ahora el 6, segundo compuesto de à dos, le multiplicaré por todos los que en la columna de los simples se hallen inferiores à él, diciendo: 6 por 3 son 18, que pongo enfrente del segundo 3, que es por el que he multiplicado, y por consiguiente en el hueco que quedó entre el 12 y el 20; despues digo: 6 por 5 son 30, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 20; paso al 9 diciendo: 9

por 5 son 45, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 30. Como en la columna de los simples no hay ya ningun factor que se halle debajo del renglon de los compuestos de à dos, donde está el 10 y el 15, no puedo sacar mas compuestos de à tres, y paso à los de à cuatro diciendo, despues de tirar la raya: 12 por el segundo 3, que es el que se halla inferior al 12 en la columna de los simples, es 36, que pongo enfrente del segundo 3; 12 por 5 son 60, que pongo enfrente del 5; continúo diciendo: 18 por 5 son 90, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 60. Como ya no puedo sacar mas compuestos de à cuatro, paso à los de à cinco diciendo: 36 por 5 son 180, que pongo despues de tirada la raya enfrente del 5; y como ya no hay mas factores simples, he concluido mi operacion.

Los numeros, que estan entre parentesis, denotan el numero de factores simples de que consta cada factor compuesto.

Ejemplo 2.° Hallar los factores simples y compuestos de 630, y de 540.

81. Problema: *Hallar el maximo comun divisor de dos o mas numeros.*

Definic. *Maximo comun divisor* de dos ò mas numeros es el mayor factor ò divisor que los puede dividir esactamente.

Resolucion. Si son dos numeros, dividase el mayor de ellos por el menor; despues partase el menor por la primera resta, la primera resta por la segunda, esta por la tercera y asi succesivamente hasta llegar à una division que no deje resta. El divisor que no dejó resta, si es numero, sera el maximo divisor pedido; pero si es 1, se dira que sola la unidad es el divisor comun de dichos numeros, y entonces se dice que son numeros *primos* entre sí.

Ejemplo. Hallese el maximo comun divisor de los numeros 90 y 63. Divido el 90 por 63, lo que me da 1 por cociente y restan 27; divido 63 por 27, y tengo 2 de cociente y sobran 9: parto 27 por 9, y como no tengo resta, digo que 9 es el maximo comun divisor de 90 y de 63. Para evitar confusion, se colocan los terminos de la division, cocientes y restas segun se ve en el prospecto.

90	63	27	9
27	1	2	3
	9	0	

2.° *Ejemplo.* El maximo comun divisor de 330 y de 210 es 30, como se puede ver, practicando.

Para hallar el maximo comun divisor de tres o mas numeros, se hallara el maximo comun divisor de dos de los numeros dados; luego se buscará el maximo comun divisor del otro numero y del maximo comun divisor hallado; en seguida el maximo comun divisor del ultimo maximo comun divisor y de otro numero dado, y asi en adelante. *Ejemplo.* Hallese el maximo comun divisor de los numeros 1032,552,408, y 264. Procediendo, segun se ve abajo, hallo que 24 es la maxima comun medida de los cuatro numeros dados.

1032	552	480	72	48	24;	408	24;	264	24.
480	1	1	6	1	2	168	17	24	11
	072	48	24	00		000		00	

Demostracion. Como el maximo comun divisor cuando mas ha de ser igual al numero menor, dividimos el numero mayor 90 por el menor 63, para ver si da un cociente esacto; pues si lo da, tendremos que 63 sera el maximo comun divisor, puesto que divida ecsactamente al 90 y à si mismo; ejecutando la division, resulta la resta 27. Si ahora buscamos un numero que divida esactamente al 63 y al 27, tendremos que dividira tambien al 90 y al 63; por que 90 es igual à $1 \times 63 + 27$, y siendo cada parte divisible por un numero, lo será el todo; veamos si el mismo 27 sera el divisor esacto, pero ejecutando la division resulta el cociente 2 y sobran 9; luego tenemos que 63 es igual a 2 $\times$ 27 + 9 ; y como 90 era igual à 63 + 27 , resulta 90 igual á 2 $\times$ 27 + 9 + 27. Si ahora hallo el maximo comun divisor de 27 y de 9 , este lo sera tambien de 90 y de 63 , pues constando estos dos numeros de partes semejantes , si cada parte es divisible por un numero lo seran los todos ; tentemos si el 9 divide al 27 , porque es sabido que él se divide à si mismo , y como dá un cociente esacto , deducimos , que es el maximo y comun divisor de los numeros dados 90 y 63 ; luego la operacion está reducida à la resolucion dada , L. Q. D. D.

PRUEBAS DE LAS CUATRO OPERACIONES.

82. *Definic. Probar una operacion es ejecutar otra diferente por lo comun opuesta a la primera, para saber si esta es esacta ;* Si la operacion es de composicion , se probarà por la descomposicion y al contrario. La operacion por medio de la cual se hace esto , se llama *prueba.*

83. *La suma estara bien hecha , cuando restando de ella la suma de todos los sumandos menos un sumando , resulte la diferencia igual al sumando que se reservo ;* v. g. sea 5 + 3 + 8 = 16 ; si sumo 3 y 8 lo que me da 11 , y este numero resto de 16 , tendre de diferencia *5* : y como el numero que reservé es tambien *5*, concluyo que no ha habido error en la suma.

La razon de esto es, que la suma 16 es un todo cuyas partes podemos reducir à dos , una el numero reservado 5 , y otra la suma 11 de los demas sumandos que son 3 y 8 ; luego si de este todo quitamos la parte 11 , nos debera venir de diferencia la otra parte *5*.

84. *La resta de dos numeros estara bien hecha , cuando la suma de la misma resta con el sustraendo , sea igual al minuendo.* Sea la espresion 8 — *5* = 3 ; si la resta 3 sumo con el sustraendo *5* , me vendria 8 , que como es el minuendo , con-

cluyo que está bien hecha la operacion.

La razon de esto es, porque el minuendo se puede descomponer en dos partes (58), una igual al sustraendo y otra igual á la diferencia: luego reuniendo el sustraendo y la diferencia nos debe resultar el minuendo.

85. *Estara bien hecha la operacion de multiplicar, cuando el producto dividido por un factor, da de cociente el otro factor.* Sea la espresion 4 × 5 = 20; si divido 20 por 4 tendre el cociente 5, ó si lo divido por 5 me vendra el cociente 4; y como de dividir por un factor, resulta de cociente el otro factor, infiero que el producto es el verdadero.

La razon es, porque el producto resulta de tomar tantas veces el multiplicando, como unidades tiene el multiplicador; ahora, cuando queremos probar si el producto es el verdadero, tratamos de ver si en la realidad se ha tomado un factor tantas veces como unidades tiene el otro, ò lo que es lo mismo, damos el producto y un factor, para hallar el otro: pero esta operacion es la misma que (65) dividir el producto por el factor dado; luego &c,

86. *La prueba de la division se hace, multiplicando el cociente por el divisor; y si este producto junto con la resta, si la hay, es igual al dividendo, estara bien hecha la division.* Sea la espresion 8 : 3 = 2 + 2 ochavos; si multiplico el cociente 2 por el divisor 3, tendre el producto 6 à quien añado la resta 2, y tengo 8; como 8 es igual dividendo, concluyo que la division está bien hecha.

La razon es, porque el dividendo es un producto, cuyos factores son [64] el divisor y el cociente, ya sea el cociente un numero entero, ya un misto de entero y quebrado; luego multiplicando divisor y cociente, debe resultar el dividendo: pero como aun no sabemos multiplicar un quebrado por un entero, solo añadimos al producto de los terminos el numero que sobró de la division esacta.

87. *Escolio.* La verdadera prueba de una operacion es hacerla con mucha atencion y serenidad: repetirla varias veces, despacio y sin precipitacion, ò ejecutarla entre varias personas para confrontar los resultados. De las que hemos dado arriba, por que no las estrañen los practicones que fijan tanto su atencion en ellas y las honran con el nombre de *pruebas reales*, solo podemos usar con ventaja de la del restar; porque el sumar la diferencia y el sustraendo es mas facil y menos espuesto à equivocaciones, que el restar de nuevo. En la operacion de dividir, que es la mas importante, no habra peligro de yerro, si se observan las reglas dadas (72) para conocer si el cociente es mayor ò menor que el verdadero.

ALTERACIONES DEL PRODUCTO

POR LAS DE LOS FACTORES.

88. Teorema: *Si uno de los factores se multiplica por un numero cualquiera, el producto primitivo quedara multiplicado por el mismo numero* ——— Esplicacion. Sea $2 \times 4 = 8$; si al factor 2 multiplico por 3, y el producto 6 multiplico por 4 de esta suerte $6 \times 4 = 24$, voy à demostrar que el nuevo producto 24 es lo mismo que el primitivo 8 multiplicado por 3.

Demostracion. El producto 8 es una suma, cuyas partidas representa el multiplicando 2 y el multiplicador 4 el numero de ellas; pero aumentada cada partida 3 veces, lo queda el todo 8 (*ax.* 3.º); luego multiplicado el un factor por un numero cualquiera, lo queda el producto. Si se hubiera multiplicado el factor 4, le tomariamos por multiplicando y al factor 2 por multiplicador (42), y hariamos el mismo raciocinio.

89. Teorema: *Si ambos factores se multiplican por un numero cualquiera, el producto primitivo se habra multiplicado por el producto de los dos numeros que multiplicaron a los factores.* ——— Esplicacion. Sea la espresion $2 \times 4 = 8$; si al 2

multiplico por 5 y al 4 por 3 de este modo $[2 \times 5] \times [4 \times 3] = 10 \times 12 = 120$, voy à demostrar que el producto primitivo 8 se habra multiplicado por 5 veces 3 igual à 15.

Demostracion. Si solo multiplicara el factor 2 por 5, el producto seria *(Teor. anterior)* 8×5; y si solo multiplicarà el factor 4 por 3, el producto seria 8×3; pero como à un mismo tiempo he multiplicado el un factor por 5 y el otro por 3, debo tambien à un tiempo multiplicar el producto 8 por 5 y por 3 de este modo $8 \times 5 \times 3$; donde se ve patentemente que el producto primitivo 8 está multiplicado por 5 veces 3 igual à 15, L. Q. D. D.

90. Teorema : *Si uno de los factores se divide por un numero, el producto primitivo quedara dividido por el mismo numero.* ——— Esplicacion. Sea la multiplicacion indicada $4 \times 6 = 24$; Si el factor 4 divido por 2 y ejecuto despues la multiplicacion, tendre $2 \times 6 = 12$; voy à demostrar, que el producto primitivo se ha dividido por 2.

Demostracion. El producto 24 es una suma, cuyas partes iguales representa el multiplicando 4 y el multiplicador 6 el numero de ellas; pero dividiendo por 2 cada parte 4 lo queda el todo 24; luego si uno de los factores &c. Como lo mismo diriamos, si acaso se hubiese dividido el multiplicador 6, porque entonces le tomariamos por multiplicando, resulta L. Q. D. D.

91. Teorema : *Si ambos factores se dividen por un numero cualquiera, el producto primitivo quedara dividido por el producto de multiplicar entre si los numeros que dividieron a los factores* ——— Esplicacion. Sea la espresion $4 \times 6 = 24$; si divido el 4 por 2 y el 6 por 3 y ejecuto con los cocientes la multiplicacion, tendre $2 \times 2 = 4$; voy à demostrar que el nuevo producto 4 proviene de haber dividido el producto primitivo 24 por 2 veces 3 igual á 6.

Demostracion. Si solo dividiera el factor 4 por 2, el producto seria (*Teor. anter.*) 24 : 2 ; y si solo dividiera el factor 6 por 3, el producto seria 24 : 3 ; pero como á un mismo tiempo he dividido el un factor por 2 y el otro por 3, debere hacer lo mismo con el producto de este modo (24 : 2) : 3. Ahora, como dividir 24 por 2 es lo mismo (*axioma* 3.°) que dividir cada unidad del 24 en 2 partes iguales, sera el cociente 24 medios ó mitades : y como este cociente, segun la indicacion, se debe dividir por 3, tendremos que dividir cada mitad en 3 partes iguales; si cada mitad tiene 3 partes iguales, se deduce que cada unidad tendra 6 partes iguales ó se habra dividido por 6. Pero dividiendose cada unidad por 6, lo ha quedado el total 24 : luego el 24 queda dividido por 6, producto que proviene de multiplicar entre si los numeros 2 y 3 que dividieron á los factores. L. Q. D. D.

92. *Corol.* De lo dicho [88, 89] se sigue; 1.° que *multiplicar los factores, es multiplicar el producto* ; asi, si quiero multiplicar 8 por 3, puedo multiplicar el factor 2 del 8 por 3, y el producto 6 multiplicar por el otro factor 4. 2.° *Que para multiplicar un numero por otro que se pueda descomponer en factores, podemos multiplicar el numero por el primer factor del multiplicador ; luego este producto por el segundo factor, despues este producto por el tercer factor y asi en adelante, y el ultimo producto sera el pedido.* Ejemplo : Multipliquese 125 por 42 ; los factores del 42 son 2, 3 y 7, pues multiplicaré 125 por el factor 2, y me da 250 : este producto multiplico por el otro factor 3, y me resulta 750 : luego este producto multiplico por el ultimo factor 7 y obtengo 5250 producto pedido.

93. *Corol.* De lo dicho (90, 91), se sigue; 1.° *Que dividir los factores es dividir el producto* ; asi, si quiero dividir 24 por 2, como los factores de 24 son 4 y 6, bastara dividir el 4 por 2 : y el cociente 2 multiplicarlo por el otro factor 6 ; el producto 12 sera el cociente pedido. 2.° *Que para dividir un numero por otro, que se pueda descomponer en fac-*

tores ; se dividira el numero por el primer factor , luego este cociente por el otro factor ; despues este cociente por el factor que sigue y asi en adelante ; el ultimo cociente sera el pedido. Ejemplo : Si quiero dividir 24 por 6 , cuyos factores son 2 y 3 , lo dividire primero por 2 , y el cociente 12 dividire por el otro factor 3 , cuyo cociente 4 sera el pedido.

3.° *Que para dividir un numero por otro , y este cociente por otro , &c , bastara dividir el numero dado por el producto de todos los divisores.* Ejemplo : Dividase 24 por 2 , y el cociente que resulte dividase por 3 ; dividire 24 por 2 veces 3 igual à 6 , y el cociente pedido sera 4.

Si tubiera que dividir el numero 210 por 2 , y el cociente por 3 , y este cociente por 5 : indicaria la operacion , como se ve : advirtiendo , que todo lo que está sobre la raya mas larga de todas se divida por lo que se halla debajo de ella , observando lo mismo en las rayas subalternas.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{210}{2}}{3}}{5} = \frac{210}{30} = 7$$

ALTERACIONES DEL COCIENTE

POR LAS DE LOS TERMINOS.

94. Teorema : 1.° *Si permaneciendo uno mismo el divisor, el dividendo se multiplica por un numero cualquiera , el cociente quedara multiplicado por el mismo numero ; y* 2.° *si el dividendo se parte por un numero cualquiera , el cociente quedara dividido por el mismo numero.*

Esplicacion. 1.° Sea la division indicada 24 : 8 = 3: si el dividendo 24 multiplico por 2 , y el producto 48 divido por el mismo divisor 8 , voy à demostrar que el cociente 6 es igual al primitivo 3 multiplicado por 2.

2.° Si el dividendo 24 parto por 3 y el cociente 8 parto por el divisor 8, voy à demostrar que el nuevo cociente 1 es igual à haber dividido el cociente primitivo 3 por 3.

Demostracion. 1.° El dividendo 24 es un producto (64) cuyos factores son el divisor 8 y el cociente 3: ahora, multiplicar el producto 24 por 2 equivale à multiplicar (92) alguno de los factores primitivos por 2; pero, segun el supuesto, el factor 8 que es el divisor no se ha multiplicado, luego se deduce por exhaucion que solo el otro factor 3 que es el cociente primitivo, se ha multiplicado por 2. L. 1.° Q. D. D.

2.° Partir el producto por un numero, equivale à partir alguno de los factores (93) por el mismo numero; pero el producto 24 se ha partido por 3, luego se ha dividido por 3 ò el factor 8 que es el divisor, ò el factor 3 que es el cociente: pero por el supuesto el factor ò divisor 8 ha permanecido el mismo, luego se deduce por exhaucion que solo el otro factor 3, que es el cociente primitivo, se ha dividido por 3, L. 2.° Q. D. D.

95. Teorema. 1.° *Si permaneciendo uno mismo el dividendo, se multiplica el divisor por un numero, el cociente primitivo se habra dividido por el mismo numero; y* 2.° *si el divisor se divide por un numero, el cociente primitivo se habra multiplicado por el mismo numero.*

Esplicacion. 1.° Sea la division indicada $30 : 5 = 6$; si el divisor 5 multiplico por 3, lo que me produce 15, y por este nuevo divisor parto el dividendo 30; voy à demostrar que el nuevo cociente 2 es igual al primitivo 6 dividido por 3.

2.° Sea la espresion $24 : 6 = 4$; si parto por 2 el divisor 6, lo que me da 3, y por este numero divido 24; voy à demostrar que el nuevo cociente 8 es igual al primitivo 4 multiplicado por 2.

Demostracion. 1.° Como el dividendo es un producto, cuyos factores son el divisor y el cociente, será el dividendo so un todo cuyas partes iguales ó sumandos representa el divisor 5, y el numero de ellas espresa el cociente 6. Ahora, al multiplicar el divisor 5 por 3, tomamos 3 sumandos de una vez; luego el sumando 15 estará contenido tres veces menos en el dividendo: pero el numero que espresa las veces que otro está contenido en el dividendo, se llama cociente; luego el nuevo cociente 2 será 3 veces menor que el primitivo 6, ó lo que es lo mismo, el primitivo se habra dividido por 3, L. 1.° Q. D. D.

2.° Considerando al dividendo como producto, y à los terminos de la division como factores, tendremos en la espresion 24 : 6 = 4 que el divisor 6 sera uno de los sumandos y su numero el 4. Al dividir, pues, 6 por 2 cuyo cociente es 3, de un sumando 6 hemos hecho dos sumandos iguales à 3; pero antes habia 4 sumandos iguales à 6, luego ahora habra 8 sumandos iguales á 3. Y como el numero de sumandos llamamos por ahora cociente, se sigue que el nuevo cociente es 8, ó que el cociente primitivo 4 se ha multiplicado por 2, L. 2.° Q. D. D.

96. *Corolario.* Del teorema anterior se sigue: 1.° que *para dividir un cociente por un numero, no hay mas sino multiplicar el divisor por dicho numero*; 2.° que *para multiplicar un cociente por un numero, bastara dividir el divisor por el numero dado.* Asi, si el cociente $\frac{24}{6}$ quiero multiplicar por 2, dividire el divisor 6 por 2 y tendre el producto $\frac{24}{3}$; y si lo quiero partir por 2, no hare sino multiplicar el divisor 6 por 2 y tendre $\frac{24}{12}$ cociente pedido.

97. Teorema. *El cociente no se altera, si se multiplican ó parten sus dos terminos por un mismo numero.*

Demostracion. Con multiplicar el dividendo por un numero, se multiplica el cociente por dicho numero (94), y con multiplicar el divisor por el mismo numero, se divide el cociente (95) por el mismo numero; luego lo que por una parte se le aumenta por otra se le disminuye, y por consiguiente permanecera el mismo.

Del mismo modo, con partir el dividendo por un numero, queda partido el cociente por dicho numero (94), y con partir el divisor por el mismo numero, queda multiplicado el cociente (95) por el mismo numero; luego lo que por una parte se le aumenta por otra se le disminuye, y por lo mismo no se altera, L. Q. D. D.

Ejemplo. Si en la espresion 12 : 6 = 2, multiplicamos los dos terminos por 2, tendremos 24 : 12 = 2, que es el mismo cociente; y si los partimos por 2, sera 6 : 3 = 2 que tambien es el mismo.

98. *Corol.* Puesto que el cociente no se altera, aunque se partan ambos terminos por un mismo numero, se sigue 1.° que *cuando el dividendo y divisor terminan en ceros, podemos borrar un mismo numero de ceros en cada termino y ejecutar la division con lo que queda*; pues borrar un cero en cada termino equivale á dividirle por 10, suprimir dos equivale á dividirle por 100. 2.° Que *cuando los terminos de la division sean divisibles por un mismo numero, tal como 2, 3, 5, 7 &c; se simplificara la division, dividiendolos por el divisor comun cuantas veces se pueda, y ejecutar despues la division*. Asi, si quiero dividir 210 por 135, observo que el dividendo y divisor son divisibles por 5, por terminar el uno en 0 y el otro en 5 (79); pues los divido por 5, y tengo los nuevos terminos 42 y 27: estos dos numeros tambien advierto que son divisibles por 3 (78), por quien los divido y me resultan los nuevos terminos 14 y 9 terminos mas simples que los primitivos. De modo que el cociente 14 que ahora obtenemos, es mucho mas

simple que $\frac{210}{135}$ que hubieramos obtenido sin hacer la simplificacion.

3.° Que *cuando los terminos tienen factores, se podran suprimir en cada uno los que sean comunes*; v. g. si tengo la division indicada 84 : 42, y descompongo dividendo y divisor en sus factores, tendre $7 \times 2 \times 2 \times 3 : 7 \times 2 \times 3$; y borrando en ambos terminos los factores comunes 7, 2 y 3 me resultara $2 : 1 = 2$, que es el mismo cociente que se tendria dividiendo los numeros primitivos. La razon de esta practica es, porque suprimir en cada termino un mismo factor, equivale á dividirlo por el mismo factor: en efecto, si dividimos el factor 3 por si mismo el cociente es 1 que lo deberiamos poner en vez del 3; pero como 1 es factor de todo numero, omitimos el escribirlo. Ahora, dividido un factor por un numero cualquiera, lo queda tambien el producto [93]; luego el dividendo 84 queda dividido por 3, y como lo mismo hemos hecho con el divisor 42, resulta que este tambien se ha dividido por 3. El mismo razonamiento haremos acerca de los otros factores comunes 7 y 2, de donde resulta como regla general que *el cociente no se altera, suprimiendo factores comunes en cada termino de la division.*

99. *Corol.* Cuando al ejecutar las divisiones del parrafo [93], por los factores del divisor, haya resta, no se hara caso de ella hasta haber encontrado el cociente final: despues *para encontrar la resta total, se multilplicara la ultima resta por el divisor precedente y a este producto se añadira la resta antecedente si la hay*; luego esta suma se multiplicará por el divisor antecedente y al productó se añadira la resta antecedente y así sucesivamente.

Ejemplo. Dividase 87 por 30; descompongo el 30 en sus factores $5 \times 3 \times 2$; divido 87 por el primir factor 5 y tengo de cociente $17 + 2$; este numero 17 divido por el otro factor 3, lo que me da $5 + 2$: el 5 divido por el ultimo factor 2 y es el cociente $2 + 1$ Aqui el cociente final es 2, pero no sabemos la resta total; para sacarla, la ultima resta 1 multiplico por el divisor antecedente 3 y al producto 3 añado la resta anterior 2 con lo que tengo 5; este 5 multiplico por el divisor anterior 5 y al producto 25 añado la resta anterior 2, lo que da 27 por resta total, debajo de la cual pondre todo el divisor 30, y sera el cociente 2 mas $\frac{27}{30}$.

La razon de esta practica es, que como la 1.ª resta 2 se debe dividir por $5 \times 3 \times 2$, la segunda 2 por 3×2 y la tercera 1 se ha de partir por 2, si debajo de cada una ponemos sus respectivos divisores y sumamos estos cocientes, tendremos la indicacion siguiente:

$$\frac{2}{5 \times 3 \times 2} + \frac{2}{3 \times 2} + \frac{1}{2}$$

Ahora, si multiplicamos los dos terminos de la division indicada $\frac{1}{2}$ por 3, no se alterara el cociente (97) y tendremos $\frac{3}{6}$ y como el otro cociente que antecede es tambien $\frac{2}{6}$, tendremos dos quebrados homogeneos à saber 3 sesmos y 2 sesmos, y sera la suma 5 sesmos ò $\frac{5}{6}$. Si en este cociente ò division indicada multiplicamos ambos terminos por 5, tendremos $\frac{25}{30}$ y como el otro cociente es tambien $\frac{2}{30}$, habra aqui dos quebrados homogeneos; que considerados como unidades, los sumaremos, y nos vendra de suma el cociente total 27 treintavos ò $\frac{27}{30}$, el mismo que resultaria, si la operacion se hubiera hecho directamente. L. Q. D. D.

CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS.

100. *Cantidad positiva es la que cospira al fin, que se propone el calculador. Cantidad negativa es la que cospira al fin contrario al que intenta el calculador.* Por ejemplo: Si me propongo calcular el dinero que me falta, 8 pesos que prestè, 6 pesos que me robaron, seran cantidades positivas: porque tratan de aumentar el menoscabo de mi dinero, que es lo que me propongo calcular. Por el contrario 7 pesos que gané al *Solo*, y 20 pesos que me han pagado seran cantidades negativas, porque van contra mi fin, cual fue computar la falta de dinero.

Las cantidades positivas tienen el signo $+$, porque tratan de aumentar el resultado; este signo se omite al principio ò cuando es una cantidad sola, asi 3 es lo mismo que $+ 3$; $6 + 8$ es lo mismo que $+ 6 + 8$.

Las cantidades negativas siempre tienen el signo $-$ que es el de restar, porque ellas tratan de disminuir ò destruir una cantidad del resultado igual à la que representan; asi en el calculo anterior que hize en orden à averiguar la falta de dinero, las salidas y entradas deberia espresar de esta suerte: 8 pesos $+$ 6 pesos $-$ 7 pesos $-$ 20 pesos. En esta espresion, y en cualquiera otra donde haya cantidades de diferentes signos, *se obtendra el resultado destruyendo cada cantidad positiva con su negativa separadamente;* ò lo que es mejor, *se reuniran en una sola todas las negativas y en otra todas las positivas; se restara la menor de la mayor y a la resta se le pondra el signo que le pertenece.* En el ejemplo anterior despues de reducir, tendre 14 pesos $- 27$, y ejecutando la destruccion con restar el 14 del 27, sera el resultado $- 13$.

De todo lo espuesto se sigue, que por su naturaleza no hay cantidades positivas ni negativas, sino supuesto el fin que se propone el Matematico. Cuando se calcula la pérdida de una cosa, toda pérdida es cantidad positiva y toda ganancia cantidad negativa; cuando se calcula la ganancia, toda ganancia es cantidad positiva y toda pérdida cantidad negativa.

DE LOS NUMEROS QUEBRADOS O FRACCIONES.

101. Numero *quebrado, fraccion o minucia* es el que solo espresa partes de la unidad, asi es 3 cuartas de vara.

Para entender bien la teoría y practica de los quebrados, conviene tener bien entendida la division de los enteros. Debemos, pues, recordar que [66] al dividir la resta 4 varas entre 6 hombres, por no poderles caber á una vara cabal, tubimos qne dividir cada unidad ò vara en 6 partes iguales y dar à cada hombre un sesmo por cada vara; y como son 4 las varas el cociente es 4 sesmos ò $\frac{4}{6}$. Ahi demostramos, que este cociente era una division indicada del dividendo 4 por el divisor 6, y como solo espresa partes de la unidad, á saber los sesmos, dedujimos (67) por corolario que *todo quebrado propio es el cociente de dividir un numero menor por otro mayor.*

De aqui se deduce que el quebrado debe escribirse con dos numeros uno encima de otro intermediando una raya; de modo que para escribir cinco ochavos de peso duro ò cinco reales, lo espresaría asi $\frac{5}{8}$. El numero que està encima de la raya se llama *numerador*, por que numera ò cuenta las partes de la unidad, tal es el 5: el que está debajo se dice *denominador*, porque denomina ò da nombre à cada parte, asi es el 8 que dividiendo el peso en ocho partes iguales, à cada parte le da el nombre de ochavo ú ochava: el numerador y denominador juntos se llaman *terminos del quebrado.* El modo de leer los quebrados se ha enseñado en el modo de leer los cocientes que provienen de dividir las restas por el divisor.

102. *Corol.* El quebrado propio siempre tiene el numerador menor que el denominador, pues es una division indicada de

un numero menor por otro mayor ; el quebrado impropio ò numero fraccionario tiene el numerador igual ò mayor que el denominador, como se ve en $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$; pues solo en estos casos, espresando partes de la unidad, llegarà à ser igual ò mayor que la unidad segun hemos definido (34) al quebrado impropio.

103, *Corol.* Todo numero se puede poner en forma de quebrado, con solo escribirle 1 por denominador, asi 8 puesto en forma de quebrado es $\frac{8}{1}$; la razon es, porque à todo numero se le puede poner por divisor la unidad [70] sin que se altere su valor.

104. *Corol.* Como el todo es igual al conjunto de sus partes (*ax.* 3 º), se sigue que la unidad es igual à un quebrado que tenga iguales el numerador y denominador: asi una vara es igual à $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{8}$ &c.

105. *Escolio.* Todas las verdades demostradas respecto de los terminos de la division y el cociente, se deben aplicar á los quebrados, con la diferencia de solo mudar los nombres; à saber, el de dividendo en el de numerador, el de divisor en denominador y el de cociente en el de quebrado. Supuesto esto, enunciamos las siguientes proposiciones.

106. 1 º *Si permaneciendo uno mismo el denominador, el numerador se multiplica o parte por un numero, el quebrado quedara multiplicado o partido por el mismo numero* (94); v. g. si en $\frac{4}{8}$ de peso duro ò cuatro reales multiplico el numerador 4 por 2, tendre $\frac{8}{8}$ ú ocho reales que es 2 veces mayor que el quebrado primitivo; y si el numerador parto por 2, tendre $\frac{2}{8}$ ò dos reales, 2 veces menor que el primitivo.

107. *Corol.* Luego de muchos quebrados que tienen un mis-

mo denominador, aquel sera mayor que tiene mayor numerados; de los quebrados $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ el mayor es $\frac{3}{8}$.

108. 2.ª *Si permaneciendo uno mismo el numerador, se multiplica el denominador por un numero cualquiera, el quebrado se habra partido por el mismo numero; y si el denominador se parte por un numero, el quebrado se habra multiplicado por el mismo numero (95).*

Por ejemplo: Si en el quebrado $\frac{3}{8}$ de peso ó tres reales multiplico el denominador 8 por 2, tendre $\frac{3}{16}$ de peso ò tres medios reales, que es 2 veces menor que el primitivo tres reales; por el contrario, si parto el denominador 8 por 2, tendre $\frac{3}{4}$ de peso, ò 3 pesetas ò 6 reales, numero 2 veces mayor que el quebrado primitivo 3 reales.

Corol. 1.° Luego de muchos quebrados que tienen un mismo numerador, aquel es mayor que tiene menor denominador: en los $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, el mayor quebrado es $\frac{2}{3}$. 2.° Luego para multiplicar un quebrado por su denominador, no habra mas que suprimirle el denominador; asi para multiplicar el quebrado $\frac{3}{8}$ por 8, suprimire el 8 y el producto sera 3; la razon es, porque dividiendo el denominador 8 por si mismo, da de cociente 1, que en vez de escribirlo, lo sobrentendemos, pues la unidad es denominador de todo numero.

Corol. 3.° Para dividir un quebrado por un entero, y este cociente por otro entero y asi en adelante, se multiplicará el denominador por el producto de los enteros [93. *Cor.* 3.°]; si quiero, v. g. dividir $\frac{3}{8}$ por 2 y este cociente por 3, multiplicaré el denominador 8 por 2 veces 3 igual á 6, y el cociente pedido sera $\frac{3}{48}$

109. 3.ª *Un quebrado no se altera aunque se multipliquen ó partan sus dos terminos por un mismo numero (97).*

110. 4.ª *Un quebrado se simplificara o quedara reducido á menores terminos, si el numerador y denominador se parten cuantas veces se pueda por su divisor comun, ó se parten una sola vez por el maximo comun divisor, o se suprimen en ambos terminos los factores comunes (98. Corol. 2.°).*

Ejemplo. El quebrado $\frac{70}{105}$ se simplificará, partiendo ambos terminos por 5, que es su divisor comun por terminar el uno en 0 y el otro en 5: la division se hara abreviadamente de este modo: quinta parte de 7 es 1 y sobran 2; quinta parte de 20 es 4, y tengo el nnmerador 14. Parto tambien el denominador 5 diciendo: quinta parte de 10 es 2; quinta parte de 5 es 1, y obtengo el cociente 21 que es el nuevo denominador, y el quebrado primitivo sera igual à $\frac{14}{21}$ que es mas sencillo. Como observo aun que ambos terminos son divisibles por 7, ejecuto la division y me resulta $\frac{2}{3}$, quebrado mucho mas simple que el primitivo, y que nos dá una idea mas clara de las partes que se han tomado del todo; porque mas facilmente cae uno en cuenta de lo que son 2 tercias de vara, que de lo que son 70 ciento cinco avos de la misma.

La misma simplificacion y mas directamente se hubiera hecho, si hubieramos dividido los dos terminos del quebrado anterior por su maximo comun divisor que lo es el 35. Si el numerador 70 se h biese descompuesto en sus factores $2 \times 5 \times 7$ y el denominador 105 en los $3 \times 5 \times 7$, y se hubieran borrado los factores comunes 5 y 7, tambien se tendria el mismo resultado 2 tercios.

VARIAS REDUCCIONES DE QUEBRADOS.

111. Definiciones. *Quebrados semejantes u homogeneos* son los que tienen un mismo denominador; *Desemejantes u heterogeneos* los que tienen diferentes denominadores.

112. Problema: *Reducir dos o mas quebrados a un comun denominador.*

Resolucion. Si son dos los quebrados; 1.° Los dos denominadores se multiplcan entre si, y el producto es el denominador comun; 2.° El numerador de cada quebrado multipliquese por el denominador del otro, y los productos correspondientes seran los nuevos numeradores.

Ejemplo. Sean los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ heterogeneos, que tratamos de hacerlos homogeneos. El numerador 2 multiplico por 7, y el producto 14 sera el numerador nuevo; multiplico despues el numerador 4 por el denominador 3 y el producto 12 sera el otro nuevo numerador: multiplico en fin el 3 por 7 y el producto 21 es el denominador comun, que lo pongo debajo de cada numerador, y tengo los quebrados $\frac{14}{21}$, $\frac{12}{21}$ homogeneos è iguales à sus primitivos.

Si los quebrados son mas de dos, se reducen à un comun denominador por esta regla general: *Cada numerador multipliquese por el producto de los denominadores de los otros quebrados, y los productos seran los nuevos numeradores correspondientes; multipliquense todos los denominadores entre si, y el producto es el comun denominador que se debera escribir debajo de cada numerador, o si se quiere, se tirara una raya sola debajo de los numeradores y se pondra bajo de ella el denominador comun.*

Ejemplo: Reduzcanse á un comun denominador los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$; multiplicaré el numerador 1 del primero por 32 producto de 4 por 8, y tendre el numerador 32 del nuevo quebrado que hade ser igual al primero dado; para hallar el numerador del segundo, multiplico su numerador 3 por 16 producto de 2 por 8, y tendre 48; el tercer numerador lo formo multiplicando el numerador 5 por 8 producto de 2 veces 4, y sera 40. Multiplico en seguida todos los denominadores, diciendo: 2 por 4 son 8; 8 por 8 son 64 y poniendolo por denominador à los numeradores nuevos, tendre $\frac{32}{64}$, $\frac{48}{64}$, $\frac{40}{64}$ quebrados homogeneos è iguales respectivamente.

Demostracion. Un quebrado no se altera, cuando se multipican sus dos terminos por un mismo numero (109); pero al haber reducido los quebrados á un comun denominador, hemos multiplicado los dos terminos de cada uno por un mismo numero; porque en el 2.° ejemplo el numerador 1 hemos multiplicado por 4 veces 8, y hemos hecho lo mismo con el denominador 2; el numerador 3 del segundo quebrado se ha multiplicado por 2 veces 8 y del mismo modo su denominador 4; &c. Luego los nuevos quebrados son iguales á los primitivos, y à mas de esto son homogeneos, pues sus denominadores se componen de unos mismos factores, L. Q. D. D.

113. *Escolio.* Cuando los denominadores de los quebrados son factores del denominador mayor que haya, se abreviará la reduccion, multiplicando los dos terminos por el factor que le falta á su denominador, para ser igual con el mayor; Asi en los quebrados del ejemplo anterior, observo que los denominadores 2 y 4 son factores del mayor denominador 8; multiplico, pues, los dos terminos del primer quebrado por 4, que es el factor que falta á su denominador para convertirse en 8: multiplico tambien los dos terminos del segundo por 2, que es el factor que falta à su denominador 4 para convertir-

se en el mayor denominador 8, y tengo los quebrados semejantes $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{8}$.

Siempre que los denominadores tengan factores comunes, ò sean los unos factores de los otros, se reduciran á un comun denominador con mas brevedad, y al mismo tiempo quedarán simplificados, con seguir esta regla general. *Hallense todos los factores simples de cada denominador, y el denominador comun que se busca, sera igual al producto de todos los factores simples diferentes que se hayan encontrado, estando cada uno repetido tantas veces como el que mas se encuentre de los denominadores dados; y para hallar los numeradores respectivos, se multiplicara el numerador de cada quebrado por los factores que le falten a su denominador para convertirse en el denominador comun.*

Ejemplo. Tratase de reducir à quebrados homogeneos $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{18}$ y $\frac{13}{24}$.

Hallo los factores simples de cada denominador, y tengo que los del 8 son 2, 2, 2; los del 12 son 2, 2, 3; los del 18 son 2, 3, 3; y los del 24 son 2, 2, 2, 3.

Donde advierto que los factores simples diferentes son 2 y 3; que el 2 el mayor numero de veces que está repetido es tres veces, y el 3 dos, por consiguiente el denominador comun sera $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$; y para hallar los numeradores respectivos, se multiplicará el de cada quebrado por los factores que falten à sus denominadores para convertirse en el comun. Por tanto, el numerador 5 del 1.° se multiplicará por 3×3; el 7 del 2.° por 2×3: el 11 del 3.° por 2×2 y el del ultimo por 3, y los quebrados dados se convertiran en los siguientes $\frac{45, 42, 44, 39.}{72}$

La razon de esta regla se conocerà facilmente, si se reducen los quebrados à un comun denominador según la regla general (112), descomponiendo cada denominador en sus factores y suprimiendo en ambos terminos los que sean comunes.

114. Problema y resolucion. *Para reducir en un numero misto el entero a la especie del quebrado que le acompaña*, se multiplica el entero por el denominador del quebrado à cuya especie se quiere reducir: al producto añadase el numerador del quebrado, si le acompaña por via de suma, ó restese de él si le acompaña por via de resta; finalmente, al producto aumentado ò disminuido del numerador pongasele por denominador el que tiene el quebrado.

Ejemplo. En el numero misto $5 + \frac{3}{8}$ pesos, quiero reducir el 5 à ochavos; pues multiplico el 5 por el denominador 8 lo que produce 40, à este producto añado el numerador 3 y tengo $\frac{43}{8}$.

Demostracion. Reducir el 5 á ochavos es reducir unidades superiores à inferiores: pero para esto se debe multiplicar [55] el numero de unidades superiores 5 por el numero de unidades inferiores de que se compone una unidad superior, y este numero representa el denominador 8; luego &c. Ahora como al producto 40 ochavos se deben añadir, segun la indicacion, 3 ochavos, tomando estos quebrados homogeneos por unidades (35), los sumaremos y nos vendra el numero 43 ochavos, que hemos sacado.

115. *Pròblema: Reducir un quebrado a otro cuyo denominador se da*; ò lo que es lo mismo: *Transformar un quebrado en otro igual, cuyo denominador se da.*

Resolucion. Multipliquese el numerador por el denominador nuevo que se le hade dar: partase el producto por el denominador primitivo, y el cociente sera el numerador del quebrado que tenga el denominador dado.

Si el cociente no es esacto, el numerador sera un numero misto de entero y quebrado. Este quebrado se podra apreciar ò despreciar: se apreciarà reputandolo igual à 1, cuando el numerador sea igual ò mayor que la mitad del denominador, la cual unidad se añadira el entero y se borrará el quebrado, y entonces el numerador se dice que es *aprocsimado por ecseso*, porque tiene algo demas. Se despreciará cuando el numerador sea menor que la mitad de su denominador, y en tal caso se dice que el numerador esta *aprocsimado por defecto*, porque le falta algo.

Ejemplo 1.° Trasformese el quebrado $\frac{3}{5}$ en otro igual pero cuyo denominador sea 20. Multiplico el 3 por 20, el propucto 60 divido por 5 y al cociente 12 pongo por denominador 20, con lo que resulta $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

2.° Sea el quebrado primitivo $\frac{3}{5}$; se trata de hallarle otro igual pero que tenga por denominador 9. Multiplico el numerador 3 por el denominador dado 9, el producto 27 parto por el denominador 5 y al cociente $5 + \frac{2}{5}$ pongo por denominador 9, lo que me da $\dfrac{5 + \frac{2}{5}}{9}$ quebrado pedido; pero como el quebrado del numerador tiene su numerador 2 menor que la mitad de su denomiuador 5, lo desprecio y el quebrado pedido sera aprocsimado por defecto $\frac{5}{9}$.

Demostracion. Como un quebrado es una division indicada de un numero entero por otro (101), en el quebrado $\frac{3}{5}$

podemos considerar que 3 varas, por ejemplo, se hande dividir entre 5 hombres: como no les cabe à una vara cabal, reduciremos las 3 varas á cualesquiera unidades inferiores, tales como *novenos*, lo que se consigue multiplicando (55) el 3 por 9: el producto 27 novenos dividiremos por el divisor 5 y el cociente sera 5 novenos mas 2 quintos de noveno ò $\dfrac{5 + \frac{2}{5}}{9}$

Donde vemos que el quebrado primitivo se ha convertido en otro cuyo denominador es 9, el mismo que se pidio en el 2.° ejemplo. Pero en el discurso de esta operacion se ha multiplicado el multiplicador por el denominador nuevo, el producto se ha dividido por su denominador primitivo y al cociente se le ha puesto por denominador el que se le quiere dar; luego &c.

La razon de la aprocsimacion que hemos enseñado, es hacer el menor perjuicio posible. Asi en nuestro ejemplo si á cada hombre se le paga 5 varas mas 1, le daremos 3 quintos demas; y si le damos solo 5 varas, le damos 2 quintos de menos: pero mayor perjuicio resulta de perder el pagador 3 quintos que de perder el acreedor 2 quintos; luego debemos elejir el menor perjuicio, cual es dar solo 5 varas despreciando el residuo. Esto se deberá entender, cuando los perjuicios sean inevitables, y lo seran siempre que las unidades inferiores sean demasiado pequeñas para poderse subdividir en otras; Pero prescindiendo de perjuicios, como la mitad ò mas de la mitad de una unidad se aprocsima mas à la unidad, que cualquiera otra cantidad que sea menor que la mitad, se deduce la razon de tomar por unidad el quebrado cuyo numerador es igual ò mayor que la mitad del denominador, y despreciarlo cuando sea menor.

116. Problema y resolucion. *Para reducir a enteros un quebrado impropio*, se dividirá el numerador por el denominador, el cociente si es esacto manifestará las unidades, y si no, sera un numero misto. La razon es, porque todo quebrado es una

division indicada, luego si se puede hacer dicha division, la ejecutaremos. *Ejemplo:* 29 tercios es igual à 9 enteros mas 2 tercios, segun se ve indicado, $\frac{29}{3} = 9 + \frac{2}{3}$.

ADICION DE QUEBRADOS.

117. Problema y resolucion. *Para sumar quebrados homogeneos*, se sumaràn los numeradores y â esta suma se le pondrá el denominador comun; si son heterogeneos se reducirán á homogeneos, ò lo que es lo mismo, a un comun denominador. El quebrado que resulta de sumar los otros, se simplificará si se puede, y si es impropio se le sacarán los enteros.

Ejemplo 1.° Sumense $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$; Como son homogeneos, sumo los numeradores 1, 3 y 5 y tengo 9 à quien pongo el denominador 8, y me resulta la suma igual á $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$.

2.° Sumense $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ de vara; los reducire à un comun denominador y tendre $\frac{60 + 54 + 75}{90}$ y sumando los numeradores y poniendo à esta suma el denominador comun, sera el resultado $\frac{189}{90}$; de este quebrado impropio saco los enteros y tendre la suma igual à $2 + \frac{9}{90}$ varas, y simplificando el quebrado, sera $2 + \frac{1}{10}$.

Demostracion. Los quebrados deben ser homogeneos, para poderse ejecutar la suma [36]; se suman los numeradores porque en ellos está el valor del quebrado; á esta suma se debe poner el denominador comun, para saber el nombre de las partes. La simplificacion que se hace es porque los resultados se deben presentar con la mayor sencillez.

118. Problema y resolucion. *Para sumar un entero con un quebrado o un quebrado con un entero*, se reduce el entero à la especie del quebrado que le acompaña, multiplicando el entero por el denominador, y á este producto se añade el numerador y se le pone el mismo denominador. V. g. Súmese 3 pesos con $\frac{5}{8}$ de peso; multiplicarè 3 por 8 y el producto 24 sumarè con 5, lo que me da por suma $\frac{29}{8}$.

119. Prob. y resoluc. *Para sumar numeros mistos con numeros mistos*, se suman primero los quebrados con los quebrados y despues los enteros, cuidando de sumar con estos los enteros, que resulten de la suma de los quebrados; si los quebrados son heterogeneos, se reducen à homogeneos.

En el ejemplo de la margen sumo primero los quebrados y la suma es 12 ochavos, de donde saco una unidad qne reservo, y quedan 4 ochavos; sumo despues los enteros y añado la unidad que reservé, y resulta la suma total 43 mas 4 ochavos.

$$\begin{array}{r} 27 + \frac{5}{8} \\ 15 + \frac{7}{8} \\ \hline 43 + \frac{4}{8} \end{array}$$

MULTIPLICACION DE QUEBRADOS.

120. Prob. y resoluc. *Para multiplicar quebrados*, se multiplican los numeradores entre sí y este producto sera el numerador: se multiplican tambien los denominadores y este producto sera el denominador. *Ejemplo.* Multipliquese $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{5}$; multiplicaré 3 por 4 lo que da 12 que es el numerador, y el 8 por 5 cuyo producto 40 pongo por denominador y tengo que $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Cuando se dan muchos quebrados para multiplicarse, se-es mejor indicar las multiplicaciones de los numeradores y denominadores, para ver si hay factores comunes y suprimirlos. Asi, si se me pide el producto de multiplicar entre si los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, tendria el resultado $\frac{2 \times 3 \times 2}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{7}$, despues de haber suprimido el 3 de encima con el 3 de debajo, y el 2×2 con en el 4 de debajo.

Demostracion. Multiplicar es tomar un numero tantas veces como unidades tiene el multiplicador: es decir, que si el multiplicador tiene una unidad, se tomará al multiplicando una vez; se media unidad, media vez ò su mitad, &c; luego en el primer ejemplo si se hade multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{5}$, se debe tomar al 3 octavos 4 quintos de vez, ò lo que es lo mismo, se le hade tomar el quinto ò la quinta parte, y este quinto multiplicar por 4. Como tomar el quinto de un numero es (75. 3.$^{\circ}$) dividirle por 5, partiremos el 3 ochavos por 5, lo que se ejecuta (108) multiplicando su denominador por 5, y será su quinto igual à $\frac{3}{8 \times 5}$: y como este quinto se debe tomar 4 veces, le multiplicaremos por 4, lo que se consigue multiplicando su numerador (106) y se tendra el resultado pedido $\frac{3 \times 4}{8 \times 5}$, L. Q. D. D.

Observaciones. 1.^{a} *Si el quebrado se multiplica por la unidad, el producto sera el mismo quebrado;* 2.^{a} *Si se multiplica por un quebrado propio, como en el ejemplo anterior, el producto sera menor que el multiplicando;* porque su numerador se multiplica por un numero menor que aquel, por quien se multiplica su denominador; 3.^{a} *Si se multiplica por un quebrado impropio, el producto sera mayor que el multiplicando*, porque su numerador se multiplica por un numero mayor que aquel, por quien se multiplica su denominador.

111. Prob. y resoluc. *Para multiplicar un entero por un que-*

brado o un quebrado por un entero, se pondra el entero en forma de quebrado poniendole 1 por denominador, y quedara reducida la operacion à multiplicar un quebrado por otro, que ya sabemos: ò, lo que es mejor, *se multiplicara el entero por el numerador del quebrado y se le pondra el mismo denominador*; porque el denominador multiplicado por 1 debe ser el mismo. Por *ejemplo*, 4 varas multiplicado por $\frac{2}{3}$ es igual à $\frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

122. *Escolio.* El problema de: *multiplicar un entero por un numero misto*, se reduce al de multiplicar un entero por un quebrado; pues el numero misto se puede reducir á quebrado: asi 4 multiplicado por $5 + \frac{3}{8}$ es igual à $4 \times \frac{43}{8}$.

123. El problema de: *multiplicar un numero misto por otro misto se reduce* al de multiplicar un quebrado por otro; v. g. $3 + \frac{2}{5}$ multiplicado por $4 + \frac{2}{3}$ es igual à $\frac{17}{5} \times \frac{14}{3}$.

SUSTRACCION DE QUEBRADOS.

Probl. y resoluc. *Para restar quebrados* se reducen à homogeneos, sino lo son: despues se resta el numerador del sustraendo del numerador del minuendo y á la diferencia se pone el denominador comun. Si el quebrado se puede simplificar, se simplificará. *Ejemplo.* De $\frac{3}{5}$ de vara restese $\frac{2}{5}$; del 3 resto el 2 y à la diferencia 1 pongo el denominador comun 5, y sera la resta $\frac{1}{5}$.

Ejemplo 2.° En la resta indicada $\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$, reducire los quebrados à homogeneos y tendre $\frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$.

Demostracion. Se reducen los quebrados à homogeneos, porque en la sustraccion lo deben ser el minuendo y sustraendo: se restan solo los numeradores, porque los podemos reputar como enteros (35), puesto que representan unas mismas unidades, y operar como en aquellos; se pone el denominador comun, para saber el orden y nombre de las unidades.

125. Prob. y resoluc. *Para restar un quebrado de un entero*, se rebaja una unidad del entero, esta se reduce [114] á la especie del quebrado que acompaña y de este quebrado se resta el sustraendo. *Ejemplo.* De 8 varas restese $\frac{3}{5}$ de vara; me presto 1 del 8 y queda en 7: el 1 reduzco à quintos y tengo $\frac{5}{5}$ de quien resto $\frac{3}{5}$ y resulta $7 + \frac{2}{5}$ varas.

126. Probl. y resoluc. *Para restar un numero misto de otro misto*, se resta el quebrado del quebrado y el entero del entero. Si el quebrado del minuendo fuese menor que el quebrado del sustraendo, se tomará una unidad del entero, la que reducida à quebrado cuyos terminos sean iguales con el denominador, se añadira al quebrado minuendo y se ejecutará la resta; por consiguiente, la suma quedará hecha con solo añadir al numerador su denominador.

Ejemplo B. Del numero misto 6 mas 3 quintos quiero restar 3 mas 4 quintos Despues de colocados como se ve à la margen, observo que el quebrado minuendo es menor que el sustraendo; me presto pues una unidad del 6, la convierto en quebrado cuyo numerador y denominador son iguales á 5; el 5 sumo con el numerador 3 lo que da 8, de este rebajo el numerador 4 del sustraendo y queda en 4 quintos, y ejecutando la resta de los enteros será la resta total $2 + \frac{4}{5}$.

B
$$\begin{array}{r} 6 + \frac{3}{5} \\ 3 + \frac{4}{5} \\ \hline 2 + \frac{4}{5} \end{array}$$

DIVISION DE QUEBRADOS.

127. Probl y resolucion. *Para dividir un quebrado por otro,*

se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y este producto sera el numerador del cociente; despues se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor y este producto sera el denominador del cociente.

Ejemplo. Dividase $\frac{2}{3}$ de vara por $\frac{4}{7}$; multiplico el numerador 2 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y el producto 14 sera el numerador del cociente: multiplico despues el denominador 3 del dividendo por el numerador 4 del divisor y el producto 12 pondre por denominador al 14, y sera el cociente igual à $\frac{14}{12} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$.

Demostracion. Dividir el quebrado $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{7}$ es dividirlo por 4 y este divisor dividirlo de nuevo por 7; dividamos, pues, el quebrado por 4 lo que se ejecuta (108) multiplicando el denominador 3 por 4 y sera el cociente $\frac{2}{3 \times 4}$. Ahora debemos dividir el divisor 4 por 7, pero dividir el divisor por 7 es (108) multiplicar el cociente por 7; luego el cociente $\frac{2}{3 \times 4}$ multiplicaremos por 7, lo que se consigue multiplicando su numerador 2 por 7, y se tendrá $\frac{2 \times 7}{3 \times 4}$; *Luego &c.* L. Q D. D.

Observacion 1.ª *Si el divisor es quebrado propio, el cociente sera mayor que el dividendo*; porque el numerador de este se multiplica por mayor numero que aquel, por quien se multiplica el denominador. Asi en el ejemplo anterior el dividendo es 2 *tercios* y el cociente es 1 + 1 *sesmo.* Esto no debe causar ningun escrupulo, pues dividir no es mas que averiguar cuantas veces un numero contiene à otro; que 2 *tercios* contenga al 4 *septimos* 1 vez cabal mas 1 *sesmo* de vez, es evidente, hagase la operacion del modo que se quiera. En efecto, si dichos quebrados $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ reducimos à comun denominador; tendremos el dividendo igual á 14 *veintiunavos* y el divisor igual á 12 *veintiunavos*; y tomando el *veintiunavo* por unidad, el 18 y el 12 seran dos numeros enteros que dividiendo el 1.° por el 2.° da de cociente $1 + \frac{2}{12} = 1 + \frac{1}{6}$ el mismo que antes.

2.ª *Si el divisor es la unidad, el cociente sera el mismo dividendo*; y 3.ª si *es quebrado impropio, el cociente sera menor que el dividendo*, por la misma razon que dimos en la primera observacion.

128. Probl. y resoluc. *Para dividir un entero por un quebrado* se pone el entero en forma de quebrado poniendole 1 por denominador, y se ejecuta como en la division de quebrados. Asi 3 dividido por $\frac{5}{8} = \frac{24}{5}$.

Para *dividir un quebrado por un entero*, no hay mas (108) que multiplicar el denominador por el entero; v. g $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$.

Escolio. Cuando se tengan de dividir numeros mistos por numeros mistos, ò un misto por un entero y al contrario, ò un misto por un quebrado y al contrario: *se reducira el numero misto a la especie del quebrado que le acompaña*, y la operacion quedara reducida a alguna de las que ya tenemos enseñadas.

QUEBRADOS DE QUEBRADOS.

129. *Quebrado de quebrado es el que espresa partes de la parte de la unidad*, asi es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de 1 peso duro. En esta espresion se dice que de 1 peso se ha tomado 3 cuartas partes ò 6 reales; que de estos 6 reales se ha tomado la mi-

tad que son 3 reales, y que de estos 3 reales se han tomado 2 tercios que son 2 reales. De mòdo que toda la espresion es igual à 2 reales ò 1 cuarto de peso.

130. Probl y resoluc. *Para reducir quebrados de quebrados a un quebrado comun*, se multiplican todos los numeradores entre sí y este producto es el numerador del quebrado comun; despues se multiplican todos los denominadores y el producto es el denominador. El quebrado comun que resulte, se simplificará, para lo que sera mejor indicar las multiplicaciones y suprimir factores comunes.

Ejemplo. El quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de 1 peso es igual à $\frac{2 \times 1 \times 3}{3 \times 2 \times 4}$, y suprimiendo los factores 2 y 3 en ambos terminos, resulta el quebrado comun $\frac{1}{4}$ de peso.

Demostracion. Tomar 1 *segundo* de 3 *cuartos* de un peso, es partir los 3 *cuartos* por mitad ò por 2, y esta mitad tomarla una vez ò multiplicarla por 1; para tomar, pues, la mitad de $\frac{3}{4}$, multiplicaremos su denomidador 4 por 2 y será el cociente $\frac{3}{2 \times 4}$; y como esta mitad se hade tomar 1 vez, multiplicaremos su numerador por 1 y tendremos $\frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$.

Ahora, como de este quebrado comun que es igual al 2.° quebrado de quebrado, se hande tomar los 2 *tercios* ò terceras partes, tenemos que hacer dos operaciones: una, tomarle el tercio ò dividir el quebrado por 3, y otra, tomar 2 veces ò multiplicar por 2 el tercio que resulte. La 1.ª operacion queda ejecutada, multiplicando su denominador por 3 lo que da $\frac{1 \times 3}{3 \times 2 \times 4}$, y la 2.ª multiplicando su numerador por 2, lo que nos da el quebrado comun $\frac{2 \times 1 \times 3}{3 \times 2 \times 4}$. *Luego para reducir quebrados* &c. L. Q. D. D.

VALUACION DE QUEBRADOS.

130. *Valuar quebrados es espresarlos como enteros, pero cuyas unidades inferiores respecto de aquella a que se refiere el quebrado, sean las que elije el calculador.* Si en el quebrado $\frac{3}{8}$ de peso elijo yo por unidad el mismo denominador *ochavo* ò *real*, que llamamos en el comercio, dicho quebrado es igual à 3 *reales* y dire que lo he valuado en reales.

131. Probl. y resoluc. *Para valuar quebrados*, se multiplica el numerador por el numero de veces que la unidad inferior, que elije el calculador, entra en la unidad â la que se refiere el quebrado; este producto se divide por el denominador y el cociente sera el numero de unidades inferiores que se elijieron. Si el cociente se compone de entero y quebrado, este quebrado se referirá à la unidad inferior ultimamente hallada y se hara con èl lo mismo que acabamos de hacer con el quebrado anterior. Procedase asi hasta haber llegado à las ultimas unidades inferiores, de que se compone la unidad cuyo fue el quebrado primitivo; y si aun resta algun quebrado, aprocsímese por *ecceso* (115) ò por *defecto*.

Ejemplo. Valúese en reales el quebrado $\frac{11}{32}$ de peso. Multiplico el numerador 11 por 8 reales que tiene un peso y tengo 88; este producto divido por el denominador 32 y tengo el cociente 2 *reales* $+ \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ *de real*. Ahora, valúo este quebrado de real en sus unidades inferiores cuales son los medios reales; para lo que multiplico el numerador 3 por 2, que son los medios que tiene el real, el producto 6 parto por 4 y tengo de cociente 1 *medio real* $+ \frac{2}{4}$ de medio; este quebrado valúo en cuartillos, multiplicando su numerador 2 por 2 cuartillos que tiene el medio real, y dividiendo el producto 4 por el denominador 4 y el cociente sera 1 *cuartillo.* Dire, pues, que $\frac{11}{32}$ de peso valen 2 *reales* y 1 *medio* y 1 *cuartillo.*

Ejemplo 2.° *¿ Cuanto valen* $\frac{5}{7}$ *de Quintal?* Despues de practicar digo que valen 2 *arrob.* 21 *lib.* 6 *onz.* 13 *adarmes*, 2 *tomines* y 2 *granos*, aprocsimando por eceeso.

Demostracion. Es la misma que dimos á la resolucion del problema (115) *reducir un quebrado a otro cuyo denominador se da*; porque el que acabamos de resolver es el mismo, con sola la diferencia, de que en vez de escribir con guarismos el denominador ò unidad inferior elejida, se escribe con letras.

QUEBRADOS CONTINUOS.

Quebrado continuo es aquel que tiene por denominador un numero misto, y el quebrado del numero misto tiene por denominador un numero misto, y asi en adelante. El quebrado contínuo se usa para hallar diferentes valores mayor y menor, entre los que se halla un quebrado comun que no se puede simplificar.

132. Problema. 1.° *Reducir un quebrado comun a quebrado continuo*, y 2.° *hallar los valores entre los que se halla dicho quebrado comun.*

Resolucion 1.° Hallese el macsimo comun divisor (81) de los dos terminos del quebrado; pongase á cada cociente por numerador la unidad, y habra tantos quebrados como cocientes haya; al denominado del primer quebrado añadasele el segundo, al denominador del segundo agreguesele el tercero y asi hasta el ultimo, con lo que se tendra el quebrado contínuo.

2.° *Para hallar los diferentes valores mayor y menor, entre los que se halla el quebrado reducido*, se calcularan primero dos quebrados correspondientes á los dos primeros cocientes, de este modo: al primer cociente pongase por numerador 1 y sera el primer quebrado; al 2.° cociente pongasele por denominador el producto del mismo cociente por el denominador del quebrado anterior mas 1, y se tendra el otro quebrado que se colocara debajo del segundo cociente. Calculados los dos primeros quebrados, se hallan los demas por esta regla general; *Multipliquense los dos terminos del quebrado anterior por el cociente, cuyo quebrado se busca; al producto del numerador añadase el numerador del quebrado anterior, y al producto del denominador añadase el denominador*; el ultimo quebrado sera igual al dado.

Ejemplo. Reduzcase $\frac{24}{83}$ à quebrado contínuo y valuese por sus limites. Hallarè el macsimo comun divisor de sus dos terminos, que como aqui es 1, se sigue que son numeros primos entre sí; de los cocientes 3, 2, 5, 2, formo el quebrado contínuo de este modo: pongo 1 por numerador al primer cociente 3 que sera el denominador; a este denominador le acompaño un quebrado que tenga 1 por numerador y por denominador el segundo cociente 2; à este 2 acompaño un quebrado, que tenga 1 por numerador y por denominador el tercer cociente 5, y asi procedo hasta el ultimo cociente. De modo que el quebrado comun dado es igual con el contínuo que se ve à la margen.

$$\frac{24}{83} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Para hallar los quebrados entre los que se encuentra el quebrado dado, dispongo los cocientes en fila, segun se ve en el prospecto, y calculo los dos primeros quebrados de esta suerte: al 3 le pongo por numerador 1 que coloco debajo del 3; pongo despues por numerador el segundo cociente 2, y para formar su denominador, digo: 2 por 3, denominador del quebrado

3,	2,	5	, 2
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{24}{83}$

anterior, son 6, mas 1 son 7 y coloco el quebrado $\frac{2}{7}$ debajo del 2. Los demás quebrados saco por la regla general, diciendo: 5 veces 2 son 10 y 1 numerador del quebrado anterior, son 11 que es el numerador, y continúo diciendo: 5 por 7 son 35 mas 3 denominador del anterior, son 38 que pongo por denominador. Prosigo diciendo; 2 por 11 son 22, mas 2 numerador del anterior, son 24 que es el numerador; 2 veces 8 son 16, mas 7 denominador del anterior, son 23; pongo 3 y llevo 2; 2 veces 3 son 6 y 2 que llevo son 8, y tengo el denominador 83, resultando por ultimo quebrado el primitivo que se dió.

Demostracion. Si en el quebrado primitivo $\frac{24}{83}$ divido ambos terminos por el numerador 24, se convertirá en..... $\frac{1}{3+\frac{11}{24}}$

Si en el denominador de este quebrado desprecio el quebrado que acompaña al 3, tendre el quebrado $\frac{1}{3}$ mayor que el primitivo, porque disminuyendo el denominador hemos (108) aumentado el quebrado. En vez de despreciar el quebrado $\frac{11}{24}$ añadamosle al 3, pero despues de dividir sus dos terminos por el numerador 11 lo que da............ $\frac{11}{24} = \frac{1}{2+\frac{2}{11}}$

Si despreciamos el $\frac{2}{11}$, nos quedará $\frac{1}{2}$ que añadido al denominador 3 del primer quebrado resulta.......... $\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$
y ejecutado la indicacion, es igual á $\frac{2}{7}$, quebrado menor que el primitivo: porque el primitivo es......, $\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{2}{11}}}$
y como hemos quitado el $\frac{2}{11}$ del denominador 2, se ha aumentado el quebrado $\frac{1}{2}$, y aumen-

tado este, lo ha quedado el numero misto que es el denominador y por consiguiente todo el quebrado. Si en vez de despreciar el $\frac{2}{11}$, dividimos sus dos terminos por su numerador 2 y el resultado añadimos al denominador anterior, nos vendrá un quebrado cuyo denominador sera un numero misto; y con el quebrado de este hariamos lo mismo que con los otros, hasta que no haya resta. Pero el metodo que hemos seguido es el mismo que se ha prescrito para hallar el macsimo comun divisor; pues hemos dividido el mayor termino del quebrado por el menor, este por la primera resta, la primera resta por la segunda, &c. y à los cocientes hemos puesto por numerador la unidad; *luego &c.*

La 2.ª regla dada para hallar los diferentes valores entre los que se encuentra el quebrado dado, se funda en la practica que deberíamos seguir al ejecutar las indicaciones, si separamos del quebrado contínuo el primer quebrado, despues los dos primeros, luego los tres primeros y asi sucesivamente.

La razon porque los quebrados que estan en lugar ímpar son mayores que el dado, y menores los que estan en lugar par, es la misma que dimos para probar que el primer quebrado $\frac{1}{3}$ era mayor y el segundo $\frac{2}{7}$ menor que $\frac{24}{83}$.

QUEBRADOS DECIMALES.

133. *Quebrados decimales son aquellos que tienen por denominador 10, 100 &c, esto es, la unidad seguida de ceros.*

Si la unidad, v. g. una vara, se divide en 10 partes iguales, cada parte se llama *decima* de la vara; si la décima se divide en otras 10 partes iguales, cada parte sera 10 veces menor que la décima y 100 veces menor que la unidad, por lo que se llama *centesima*; si la centésima se divide en 10 partes iguales, cada parte sera diez veces menor que la centésima y mil veces menor que la unidad, por lo que se llama *milesima* Del mismo modo se divide cada milesima en 10 *diezmilesimas*;

cada diezmilesima en 10 *cienmilesimas &c.*

134. *Observacion.* Del pàrrafo anterior consta que la décima es diez veces menor que la unidad; que la centésima es diez veces menor que la décima, &c; es decir, consta que las unidades decimales siguen el sistema décuplo de ser diez veces menores unas respecto de otras; luego las podremos escribir del mismo modo (27) que los enteros, quienes siguen el mismo sistema, y omitir sus denominadores.

Por tanto, las *decimas* ocuparan el 2.° lugar àcia derecha despues de las unidades, y para que no se confundan con los enteros, pondremos despues de estos una *coma* que se llama *coma decimal*; v. g. Para escribir 3 *varas* 7 *decimos*. espresaremos asi: 3, 7. Las *centesimas* ocuparan el tercer lugar contando desde las unidades ò desde la coma; asi 3 *varas y* 7 *centesimos* se escribirá de esta suerte: 3, 07. Las *milesimas* estaran en 4.° lugar; las *diez milesimas* en 5.° y las *cien milesimas* en 6.°, los cuales seis lugares formaràn un período. El segundo período sera de las *millonesimas*, *diez millonesimas*, *cien millonesimas*, *milmillonesimas &c.*; el tercero de las *billonesimas*, el cuarto de las *trillonesimas* y asi en adelante. De lo dicho se deduce la resolucion del siguiente:

135. Problema. *Escribir una fraccion decimal.*

Resolucion. Sepárese el guarismo de las unidades con la coma decimal y sino hay unidades, pongase cero y en seguida la coma; à continuacion escríbase el numero como si fuera entero, pero que llegue hasta aquel lugar que corresponde al valor de la decimal, el cual valor es el ultimo que se enuncia.

Ejemplo 1.° Escríbase *quinientas veintinueve milesimas*; como no hay ningun entero, escribo un cero y despues la coma; y como el decimal espresa *milesimas*, debera el numero llegar hasta el 4.° lugar, que lo escribo de esta suerte: 0, 529.

2.° Escríbase, *mil diez y ocho millonesimas.* Aqui observo que el valor de *millonesimas* pertenece al 2.° periodo; escribire pues *mil diez y ocho* segun regla general, y tendre 0, 000001018.

136. Problema. *Leer decimales puras o mistas de enteros.*

Resolucion. Procédase como en los enteros, separando con comas por encima, (para no confundirlas con la coma decimal), los guarismos de tres en tres ò de seis en seis y poniendo puntos y cifras en las respectivas divisiones. Estas divisiones se continuarán haciendo con los enteros, si se quiere leer el decimal como quebrado impropio; pero sino, solo se estenderan hasta la coma decimal. Finalmente, vease que valor se sigue al valor de las dècimas àcia izquierda, y este sera el nombre que se pronunciará al fin.

. 2 . 1 ;

Ejemplo. Lease 5 4 3 2 7, 3 5 0 0 4 6 7 8 1 0 3 5.

Si esta espresion la leo como numero misto, leeré por separado los enteros y decimales asi: *cincuenta y cuatro mil trescientas veintisiete unidades*, *trescientos cincuenta mil cuarenta y seis millones*, *setecientas ochenta y una mil 35 billonesimas.* Aqui pronuncio *billonesimas* al fin, porque es el valor que sigue á las décimas ácia izquierda.

Si quiero leer como quebrado impropio, enunciaría de esta suerte: *Cincuenta y cuatro mil trescientos veintisiete billones, trescientos cincuenta mil cuarenta y seis millones*, *setecientas ochenta y una mil treinta y cinco billonesimas.*

Demostracion. Como los decimales siguen la misma ley que los enteros, de ser 10 veces menores las unidades segun abanzan un lugar ácia derecha, hemos dado el mismo método que dimos para leer aquellos.

137. Teorema. *Un quebrado decimal no se altera, ya se añadan o quiten a su derecha los ceros que se quieran.*

Esplicacion. Sea el quebrado decimal: 0, 70; voy à demostrar, que si le añado un cero tal como 0, 700; ò le quito el cero que tiene, tal como 0, 7, su valor sera el mismo.

Demostracion. El decimal 0, 70 es lo mismo que $\frac{70}{100}$; si añadimos un cero á cada termino, ambos se habràn multiplicado por 10 y el quebrado sera $\frac{700}{1000}$ igual (109) al primitivo: y si quitàmos un cero de cada término, ambos quedaran partidos por 10, y el quebrado $\frac{7}{10}$ sera tambien el mismo que el primitivo. Pero el quebrado $\frac{700}{1000}$ es igual à 0, 700 y el $\frac{7}{10}$ es igual á 0, 7; luego 0, 70 es lo mismo que 0, 700 y que 0, 7. L. Q. D. D.

138. *Escolio.* Como un numero entero no tiene quebrado alguno, ò está acompañado de cero quebrado; se sigue, que *a un numero entero se le puede poner a la derecha de las unidades la coma decimal,* y despues de ella los ceros que se quieran;* asi 24 es igual à 24, y este igual à 24,00.

Si en este numero abanzamos la coma un lugar ácia derecha de este modo 240, 0, quedará hecho 10 veces mayor (30) de lo que era, ò se habra multiplicado por 10; si la adelantamos dos lugares, se convertira en 2400, y se habra multiplicado por 100. Por el contrario, si retrocedemos la coma un lugar ácia izquierda del numero, nos vendra el 2; 400 que es (73) 10 veces menor que el primitivo ò este se habra dividido por 10: retrocediendola dos lugares, tendremos 0,2400 lo mismo que 0, 24 que es 100 veces menor que el primitivo 24. Como estas mudanzas de valores del numero no dependen de la naturaleza de los guarismos, que estan á derecha de la coma, sino tàn solo de la variacion de sus lugares con arreglo à nuestro sistema décuplo, se sigue en general que;

Un quebrado decimal puro o misto de enteros quedara multiplicado por 10, 100 *&c, con solo avanzar la coma uno, dos &c lugares acia derecha; y quedara partido por* 10, 100 &c, *con retroceder la coma uno, dos, &c lugares acia izquierda.* V. g. si à 3, 7 varas quiero multiplicar por 10, sera el producto 37, varas; y si divido por 10, sera el cociente 0, 37 varas, ò 37 *centesimos* de vara.

139. **Problema.** *Reducir un quebrado comun à decimal.*

Resolucion. 1.° Añadanse al numerador los ceros que sean suficientes, para poder ejecutar la division por el denominador, y coloquense los términos con las rayas de dividir; 2.° Divídase el numerador por el denominador, y el cociente, despues de haber puesto el cero seguido de la coma, comienzese à escribir desde el lugar de las decimas, si solo se añadió un cero al numerador: desde el lugar de las centésimas que es el 2.° despues de la coma, si se añadieron dos ceros: desde el de las milésimas que es el 3.° despues de la coma, si se añadieron tres ceros y asi en adelante, cuidando de llenar con ceros los lugares vacíos. Si hay resta, se le añade un cero, se divide, y se pone el cociente à continuacion de los anteriores; si despues de añadir un cero á la resta, esta no contiene al divisor, se pondra cero en el cociente, y se añadira otro cero. Asi se continuarà hasta que no haya resta, ó si siempre la hay, hasta sacar los guarismos decimales que se quieran.

Ejemplo. Reduzcase à decimal el quebrado $\frac{1}{16}$.

	16
100	——
40	0,0625
80	
00	

Ejecutaré la operacion en esta forma: tomarè el 1 por dividendo y el 16 por divisor, y como es quebrado propio, pongo desde luego en el cociente 0, ; veo cuantos ceros necesito añadir al 1 para que contenga alguna vez al 16, y son dos, que de facto los añado. Empiezo ahora la division diciendo: 16 en 100 cabe 6 veces, pongo 6 en el segundo lugar despuès de la coma, porque añadí dos ceros al numerador 1, y lleno con cero el lugar vacío de las décimas: multiplico el 6 por el divisor y resto, à la resta 4 añado un 0; veo que 16 en 40 cabe 2 veces, pongo 2 en el cociente, multiplico por el divisor y resto de 40. A la resta 8 añado un 0, divido el 80 por 16, el cociente 5 multiplico por el divisor, resto del dividendo y nada queda de diferencia. Digo pues que $\frac{1}{16}$ es igual á 0, 0625.

Si el quebrado es impropio, se dividira el numerador por el denominador; á la resta que resulte se añadiran los ceros que se necesiten y se hara la division, poniendo el cociente al lado del entero despues de poner la coma. Asi $\frac{8}{3}$ igual à 2, 6 6 6 6 6 &c.

Demostracion. La razon de esta práctica es la misma que dimos en el problema (115) que es el que acabamos de resolver; porque reducir un quebrado á decimal, no es mas que reducir un quebrado á otro cuyo denominador sea 10, 100, &c.

Por tanto, para reducir el quebrado à décimos, se multiplica su numerador por 10 con solo añadirle un cero, y el cociente ocupará el lugar de las décimas que es el primero despues de la coma: para reducirlo á centésimas se multiplicará su numerador por 100, lo que se consigue añadiendole dos ceros, y el cociente debera llegar hasta el lugar de las centésimas, que es el segundo despues de la coma. En fin, cuantos ceros se añadan al numerador, ya sea por junto, ya sea sucesivamente añadiendo à las restas que quedan despues de dividir, otros tantos guarismos decimales [redacted] resultaràn al lado de la coma.

140 Escolio. *Cuando se pide reducir a decimal un quebrado comun, bajo la condicion de no perder cierta unidad inferior dada*; se sacarán tantos guarismos decimales mas uno, cuantos guarismos tenga el numero que espresa las veces, que la unidad inferior que no se quiere perder, se contiene en la unidad cuyo es el quebrado comun. Asi, si quiero reducir $\frac{3}{8}$ de peso duro á quebrado decimal, con la condicion de que no se pierda un *cuartillo*; vere que el peso se compone de 32 *cuartillos*, y como este numero tiene dos guarismos, sacaré tres cifras decimales, y tendre el 3 *ochavos* reducido á 0, 3 7 5.

141. Escolio. *Un quebrado comun solo se podra reducir á*

decimal esacto, cuando el denominador tenga por factores 2 y 5, o solamente uno de estos y no otros; La razon es, por que por cada 0 que se añada al numerador, se le multiplica por 10 igual à 2 X 5: ahora, si los factores del divisor son todos 2, por cada multiplicacion se podria suprimir un 2 del divisor y dividendo, hasta que se supriman todos los del divisor, y entonces no quedará resta. Asi el quebrado $\frac{3}{8}$ del ejemplo anterior, ejecutando la regla para reducirlo à decimal, es 3000 : 8 = 3 X 2 X 5 X 2 X 5 X 2 X 5 : 2 X 2 X 2, y suprimiendo factores comunes, es igual à 3 X 5 X 5 X 5 : 1 = 375. Lo mismo diremos cuando los factores del denominador son 5.

Cuando el denominador tiene otros factores, al cabo de cierto tiempo se repiten los mismos cocientes, y entonces esta fraccion decimal se llama *periodica*; tal es $\frac{2}{3}$ = 6666 &c. Cuando parte del cociente se repite, y parte no, la fraccion se dice que es *parcialmente periodica*; asi $\frac{5}{12}$ = 0, 41666 &c.

Sumar decimales.

142. Problema y resolucion. *Para sumar decimales*, se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan décimas debajo de décimas, centésimas debajo de centésimas &c, es decir, que las comas formen columna en todos los sumandos. Despues empezando por derecha, se suman del mismo modo que los enteros, cuidando de poner la coma en la suma debajo de la coma de los sumandos.

Ejemplo. Sumese 8, 32 con 0, 683, con 15, 097. Dispongo y sumo las partidas del mismo modo que si fueran enteros, llevando siempre las decenas que resulten de la suma de una columna, para añadirlas a la co-

	8 , 3 2
	0 , 6 8 3
	1 5 , 0 9 7
	2 4 , 1 0 0

lumna siguiente à izquierda, ya sea columna de decimales ò de enteros. La suma buscada aqui es 24 , 100 , como se ve á la margen.

Demostracion. Como aqui hemos sumado todas las unidades de una misma especie, y las sumas parciales las hemos reunido en una sola, resulta que esta es la suma total.

Restar decimales.

143. Problema y resolucion. *Para restar decimales*, se opera del mismo modo que en los enteros, colocando la coma y demas unidades del sustraendo debajo de la coma y las unidades de la misma especie del minuendo. Si el minuendo tiene menos guarismos decimales que el sustraendo, se le añadiran de facto ò se le supondran añadidos los ceros que se necesiten, lo que no altera el quebrado. Cuando el guarismo de las décimas del minuendo sea menor que el del sustraendo, se tomará de las enteros una unidad y se añadiran diez unidades al guarismo de las décimas.

Ejemplo. Vease la diferencia que hay entre 12 , 23 y 8 , 7457. Despues de colocado el numero menor debajo del mayor, observo que el sustraendo tiene dos	1 2 , 2 3 8 , 7 4 5 7 ——————— 3 , 4 8 4 3

guarismos mas que el minuendo; le añado á este mentalmente dos ceros, y ejecuto la division diciendo: de 7 à 10 van 3 que pongo debajo de la raya; de 5 á 9, van 4; el 3 quedò en 2 á quien añado 10, y digo: de 4 á 12 van 8; de 7 á 1, no puede ser: me presto una unidad del entero 2 y añado diez al 1 y digo: de 7 á 11 van 4, y pongo la coma. El entero 2 tiene 1 menos, y asi le agrego la decena anterior, y digo; de 8 á 11 van 3, con lo que concluyo la operacion y saco de diferencia 3 , 4843.

Demostracion. Operamos del mismo modo que en los enteros, porque los decimales siguen la misma ley que el sistema de aquellos.

Multiplicar decimales.

144. Problema y resolucion. *Para multiplicar decimales*, se multiplican como si fuesen enteros sin hacer caso de la coma; pero en el producto se separan con la coma ácia derecha tantos guarismos, cuantos guarismos decimales hay en ambos factores juntos: sino hay bastantes, se añaden à la izquierda los que se necesiten.

Ejemplo. (A). Multiplíquese 0, 23 por 0, 3. Coloco el factor que tiene menos guarismos debajo del mayor: los multiplico à manera de enteros, y del producto 69 separo con la coma tres guarismos à la derecha supliendo con 0 el uno que falta, porque en ambos factores juntos hay tres guarismos decimales, y tengo el producto 0, 069.

(A)

```
  0 , 2 3
  0 , 3
---------
0 , 0 6 9
```

En el *ejemplo* (B) separo del producto cuatro guarismos àcia la derecha, porque en el multiplicando y multiplicador hay por junto cuatro guarismos decimales.

(B)

```
      3 4 , 8 7
        2 , 5 6
---------------
    2 0 9 2 2
  1 7 4 3 5
  6 9 7 4
---------------
  8 9 , 2 6 7 2
```

Demostracion. Suprimir ò no hacer caso de la coma en el multiplicando 0, 23 del ejemplo A, es haberla corrido dos lugares ácia derecha de este modo 23, con lo que se ha multiplicado (138) por 100 el factor: suprimiendo la coma en el multiplicador 0, 3 se le ha corrido tambien la coma un lugar à la derecha, ò se le ha multiplicado por 10. Como el un factor se ha multiplicado por 100 y el otro por 10, se sigue que el producto 69 es (89) 1000 veces mayor que el primitivo: luego para obtener este, deberemos hacer 1000 veces menor el nuevo producto, lo que se consigue (138) retrocediendo la coma tres lugares á la izquierda. Como hariamos el mismo razonamiento sobre cualquier otro caso de la misma naturaleza, se sigue L. Q. D. D.

145. *Escolio.* De lo dicho [138] se deduce que para multiplicar decimales por 10, 100 ó en general por la unidad seguida de ceros; no hay mas que correr la coma ácia derecha tantos lugares como ceros hay despues de la unidad. Por *ejemplo*, si multiplico 8, 37 por 10, el producto sera 83, 7; si por 1000, el producto sera 8370, &c.

Dividir decimales.

146. Problema y resolucion. *Para dividir decimales*; 1.° se añaden al dividendo y divisor tantos ceros, cuantos se necesiten para que en ambos haya igual numero de guarismos decimales; 2.° Se borra la coma en ambos terminos y se hace la division al modo que en los enteros, sin mudar nada en el cociente. Si de la division resulta alguna resta, en vez de ponerla al lado del cociente en forma de quebrado comun, se reducira á decimales; para ello se añade á la ultima resta un cero, se divide por el divisor y el cociente se pone al lado de la coma puesta á la derecha de los enteros que se sacaron; ejecutando lo mismo con las otras restas, hasta sacar los guarismos decimales que se quieran.

7:0,16 = 700 | 16	(A);	5, 456 : 0, 4 =	5456 | 4000	[B].
60 | 43, 75			1456 | 1,364	
120			256	
80			16	
00			00	

Ejemplo. [A]. Dividase 7 por 0 1 6 Añado al dividendo 7 dos ceros, porque el divisor tiene dos guarismos decimales; y borrando la coma en el divisor y dividendo, queda reducida la operacion á dividir 700 por 16.

Ejecuto la division, y tengo el cociente 43 enteros y sobran 12; pongo una coma en el cociente, añado 0 al 12 y se convierte en 120, que lo divido por 16: pongo el cociente 7, lo multiplico por el divisor y resto; à la resta 8 agrego 0 y divido 80 por 16, lo que da 5 de ciente esacto. Concluyo la operacion y digo que 7 dividido por 0, 16 da de cociente 43 ; 75.

Ejemplo [B]. Aqui tengo que dividir 5, 456 por 0, 4. Añado al divisor 4 tres ceros, porque otros tantos guarismos decimales tiene el dividendo; suprimo las comas y ejecuto la division, de donde resulta el cociente 1 y sobran 1456. Ahora, en vez de añadir á la resta un cero, tacho el primero del divisor, tirandole una rayita ò poniendole un punto sobre èl, y ejecuto la division de la resta por el divisor con un cero menos; hago lo mismo con las demas restas, porque esto equivale à suprimir en el dividendo y divisor un cero ò à partirlos por 10, lo que no altera el cociente. El cociente pedido es 1, 364.

Demostracion. Con añadir al termino que tiene menos guarismos decimales, los ceros que se necesiten, no se altera [137] su valor; y con suprimir la coma en ambos terminos, los multiplicamos [138] por la unidad seguida de tantos ceros como lugares ha corrido ácia derecha, lo que tampoco altera el cociente.

147 *Escolio.* Para dividir las decimales puras ò mistas por la unidad seguida de ceros, como 10 100, &c.; no hay mas que hacer sino [138] retroceder la coma tantos lugares à izquierda, como ceros haya despues de la unidad. Asi 82, 7 dividido por 10, es igual à 8, 27; dividido por 1000 es igual á 0, 0827.

Valuacion de decimales.

148. Problema y resolucion para valuar decimales, se multiplican estos por el numero de veces que la unidad inferior en que se quiere valuar, cabe en la unidad á que se refiere el decimal; los guarismos del producto que estan a izquierda

de la coma son las unidades inferiores, y los que estan á derecha son quebrado decimal de dichas unidades inferiores. Este quebrado decimal se vuelve á multiplicar por el numero de unidades inferiores de que consta la unidad anterior. Asi se continúa hasta haber sacado las unidades inferiores que uno quiera; y si aun resta quebrado decimal, se desprecia ó aprocsima por defecto, sino llega á 5 decimas; y se aprecia ò aprocsima por ecceso añadiendo 1 á las unidades sacadas, si llega ò pasa de 5 décimas.

Ejemplo 1.º Quiero saber lo que valen en monedas de comercio 0, 34 de peso duro.

Multiplico el quebrado por 8 que son los reales de que consta un peso, y tengo 2, 72 *reales*; multiplico el decimal 72 por 2, que son los medios que tiene un real, y el producto es 1, 44 *medios*. Valúo el quebrado 44 en *cuartillos*, multiplicandole por 2 que son los cuartillos de que se compone un *medio*, lo que me da el producto 0, 88 que no llega á ser un cuartillo; pero como el 8 decimas pasa de 5, considero el quebrado 0, 88 como 1 *cuartillo*. Dire, pues, que 0, 34 de peso son 2 *reales*, 1 *medio* y 1 *cuartillo*, aprocsimando por ecceso.

(1.º)

0, 34	*Pesos.*
8	
2, 72	*Reales.*
2	
1, 44	*Medios.*
2	
0, 88	*Cuartil.*

Ejemplo 2.º 0, 412 de Arruba vale 10 *libras*, 4 *onzas*, 12 *adarmes*, 2 *tomines*, aprocsimando por defecto. Se advierte, que al decimal 300 que acompaña á 10 libras se le borran los dos ceros, lo que no le altera (137).

(2.º)

0, 412	*Arrobs.*
25	
2060	
824	
10,300	*Librs.*
16	
4,8	*Onz.*
16	
12,8	*Adar.*
3	
2,4	*Toms.*

NUMEROS DENOMINADOS.

149. *Numeros complejos ó denominados*

son aquellos que representan diferentes unidades inferiores, relativas todas a una sola unidad o todo. Asi son 3 cuartas, 5 ochavos y 4 pulgadas de vara, en donde se ve que estos tres numeros espresan unidades inferiores ò partes diferentes de la unidad, que es la vara.

Los numeros denominados en la realidad no son mas que unos quebrados, cuyos denominadores se escriben con letras en vez de escribirse con guarismos; ó cuyos denominadores se espresan con aquel nombre que está recibido en el comercio. Asi en vez de escribir y leer $\frac{3}{8}$ de peso, escribimos y leemos 3 *reales*; en lugar de escribir y enunciar $\frac{3}{4}$ de 1 vara, escribimos y enunciamos 3 *cuartas de vara.* Pero se debe advertir, que aunque en *abstracto* todos los quebrados iguales son semejantes, no sucede lo mismo en *concreto*; asi en abstracto 1 medio es igual y semejante à un medio; pero en concreto un medio peso no es igual ni semejante à un medio año, media vara, media legua. Luego es indispensable que los denominados se refieran à una sola unidad, v. g., de peso, de estension, de tiempo, &c.

Medidas lineales o de longitud.

Una *legua*, segun real orden de 1801 *(Diccion. de la Acad. Esp.)*, tiene 20000 pies ò 6666 varas y 2 tercias. Una *vara* tiene 3 *pies o tercias.* Un *pie* tiene 12 *pulgadas.* Una pulgada 12 *lineas.* Tambien la vara tiene 4 cuartas ò palmos, 8 ochavas, 6 sesmas &c. La Braza tiene 2 varas. La vara que nos rije es la de Burgos.

Medidas agrarias o de Agrimensores.

Vara cuadrada es un plano cuadrado, que tiene una vara en cada uno de sus cuatro lados.

Un *Topo* en el deparmento del Cuzco es un rectàngulo, ò cuadrilongo que tiene 88 varas de largo y 44 de ancho, y comprende 3872 varas cuadras. El Topo tiene 4 *cuartillas* ò *Cilcos*.

La *Fanega* o *Fanegada* de tierra en el mismo departamento es un cuadrilongo de 288 varas de largo y 144 de ancho. La fanegada tiene 41472 varas cuadradas, ò 10 topos y tres cuartillas muy poco menos.

Medidas agrarias de Castilla.

Una *Fanega* de tierra tiene 12 *Celemines*; 1 Celemin 4 *cuartillas* de tierra; 1 cuartilla 12 *Estadales* cuadrados; 1 Estadal cuadrado 16 varas cuadradas; 1 *vara cuadrada* 9 pies cuadrados.

De tiempo.

Un *Siglo* tiene 100 años. El *Lustro* 5 años. La *Olimpiada* tenia 4 años. El *Año Juliano o civil* tiene 12 meses ò 365 dias, y si es bisiesto, 366.

Treinta dias trae Noviembre,
Con Abril, Junio y Septiembre;
Veintiocho trae el uno,
Los demas á treinta y uno.

Febrero tiene 28 dias y 29 en añò bisiesto. El *Dia natural* ò *Europeo* tiene 24 horas; la hora 60 minutos; el *Minuto* 60 segundos; el *segundo* 60 terceros &c.

De peso.

Un *Quintal* tiene 4 Arrobas; la *Arroba* 25 Libras; la *Libra* 16 onzas: la *Onza* 16 Adarmes: el *Adarme* 3 *Tomines*; el *Tomin* 12 Granos de cebada.

La *Libra* tambien se divide en 2 *marcos*; el *marco* tiene 8 *onzas*; la *onza* 4 *cuartas*.

La *libra medica y farmaceutica* tiene 12 *onzas*; la *onza* tiene 8 *dracmas*; la *dracma* tiene 3 *escrupulos*; el *escrupulo* 24 *granos* de cebada.

De moneda.

La *onza de oro* en el Perú tiene por ley 17 pesos duros. El *Peso* 8 reales; el *Real* 2 medios, 4 cuartillos.

Nota. El *peso duro* vale 20 reales de vellon moneda de Castilla; el *Real* de *vellon* tiene 34 *maravedises*; un real de plata del Perú vale 85 maravedises.

Medida de la finura de la plata y oro, o ensaye de moneda.

El oro puro y sin mezcla tiene 24 *quilates*; es decir, que si un peso cualquiera de oro, v. g. una onza, se divide en veinticuatro partes iguales, cada vigesimacuarta parte se llama *quilate.* Se dira que el oro tiene 21 quilates, cuando contenga veintiuna partes de oro puro, y tres partes de cobre ù otro metal. El quilate tiene 4 partes iguales, que se llaman *granos de fino.*

La plata pura y sin mezcla tiene 12 *dineros*; es decir, que si una cantidad cualquiera de plata, v. g. una cuarta, se divide en doce partes iguales, cada duodecima parte se llama *dinero.* Se dira que un trozo de plata tiene 10 *dineros*, cuando diez de sus partes iguales son de plata pura y las otras dos de cobre ù otro metal. El dinero tiene 24 partes iguales llamadas *granos de fino.*

Se llama *ley* ò *valor intrinseco* del oro ò plata, el grado mayor ò menor de pureza: determinar este grado, se dice *dar la ley* al oro ò plata; y la operacion mediante la que se consigue esto, se dice *ensaye.*

El oro para acuñar moneda en el Perú debe tener la ley de 21 quilates, y la plata la de 10 dineros, 20 granos de fino.

Digresion.

Problema. *Dar la ley o ensayar la plata y el oro.*

Resolucion. Para ensayar una barra o trozo de plata, se observarà lo siguiente: 1.° Tómese de la barra ò fria, ó derretida, que es lo mejor, un pedacito que llaman *bocadillo*; redúzcasele á planchas delgadas faciles de poderse cortar con las tijeras, y pésese en una balancita muy fiel en un peso determinado, tal como 36 granos de marco por ejemplo. 2.° Muelanse huesos de animales quemados hasta ponerse blancos, lavense los polvos repetidas veces con lejía y al fin con agua, y amasada la materia fórmese un crisol pequeño en forma de una copita, al que por esto se llama *Copela*. Colóquese la copela en la mufla *(vaso de barro cocido en la olleria, en figura de estribo abaulado)*, que debe estar ya enrrojecida dentro del hornillo, con dos ó tres tantos de plomo puro, como plata se va à ensayar: estando el plomo derretido en la copela, pongase en medio la plata reducida á planchitas pequeñas para facilitar su fusion, y avívese el fuego con leña para que la llama reverbere sobre el metal. Cuando todo el plomo oxidado y vitrificado desaparezca de la copela, (lo que se conoce por el brillo del metal, que va aumentándose á medida que se purifica, y se cubre de luz brillante toda su superficie, cuando lo está), se saca y deja enfriar la copela. 3.° Pèsese de nuevo el boton de plata bien limpio, y la parte que merme sera igual à la liga que tiene la barra. Por consiguiente, si merma 18 granos ó la mitad de los 36 que antes pesaba, se dira que dicha plata tiene de mezcla la mitad de su peso, ó que es de 6 dineros. Si tiene de menos 12 granos ó la tercera parte, sera su ley de 9 dineros. Este ensaye se llama por *copelacion* ò por la *via seca.*

Para ensayar el oro se ejecutará lo siguiente: 1.° Se toma del tejo derretido un pedacillo: se le reduce à plancha muy delgada y se pesa en un peso determinado, tal como dos tomines ó 24 granos. 2.° Este oro pesado se copela por el metodo anterior con dos ò tres tantos de plata y la mitad de su peso de plomo puro; se mezcla bien la fusion, y cuando desaparezca el plomo, se saca y deja enfriar la liga de oro y plata que ha quedado. 3.° Esta liga se reduce à plancha larga y delgada, se la enrosca á manera de cucurucho: se la pone en un matraz pequeño, y se echa encima cerca de una onza de acido nitrico que llaman *agua fuerte*, mezclandole la mitad de su peso de agua: se pone una sarten llena de arena sobre el fuego, y el vaso se sumerje en esta arena: se va calentando lentamente hasta que el licor entre en hervor; fenecido este y estando la plata de color pardo, se le muda el acido en cantidad como de una onza y se hace hervir de nuevo. Cuando el acido ya no tenga accion sobre el metal, porque ya no hierve, se le decanta ó echa inclinando el vaso: se saca el cucuruchito, se lava en agua y se le enrojese al fuego sobre el crisol. 4.° Pésese este oro purificado y véase la merma, que sera igual á la mezcla que tubo de los demas metales. Asi es, que si merma 4 granos de los 24 que antes pesó, tendrà el oro una sesta parte de mezcla, ó sera de 20 quilates: si merma 8 granos ó la tercera parte, sera su ley de 16 quilates. La purificacion del oro por el agua fuerte, separandole la plata, se llama el *apartado* y tambien el ensaye por la *via humeda*. (*Bails*, *Brisson*, *Chaptal*, *Fourcroy*, *Macquer*).

Demostracion. La copela debe hacerse de cenizas de huesos de animales, porque la esperiencia enseña que son las mas refractarias ó resisten mucho tiempo al fuego; deben ser blancas, para evitar la revivificacion de las escorias, y el hervor del metal que se ensaya; deben lavarse muy bien, para despojarlas de las sales é impedir de este modo su vitrificacion. Se mezcla plomo con la plata, y se espone á fuego violento; porque el plomo se conbina con el cobre y demas metales que estan en aliaje con la plata, se oxida con ellos y convertido en vidrio penetra la porosidad de la copela. Mas la plata queda fija y sin alterar su peso, aun cuando se la es-ponga al fuego mas violento y continuado : pues, segun Bails, sufrio un mes contínuo el fuego activo en el horno de vidriería, sin padecer la menor alteracion de su peso.

Bien que en el Ustorio de *Trudayne* espuesta al foco se volatilizó en humo ; pero este humo recibido en una plancha de oro la plateó, en el esperimento que hicieron los Académicos de Paris.

Para ensayar el oro, se copela primero con plata y plomo ; el plomo es para despojarlo de los demás metales, que no son plata. La liga de oro y plata se infunde en acido nítrico, porque este solo ataca la plata, reduciendola á cal ù óxido; pero al oro le deja intacto, segun consta à cualquiera que tenga medianos principios de Química. Se ha dicho que se funda el oro con dos ò mas tantos de plata; porque, como dice *Fourcroy*, la esperiencia enseña, que es necesario contenga el oro por lo menos el duplo de su peso de plata, para que el ácido nítrico pueda disolver enteramente este ultimo metal.

Escolio 1.° El ensaye tambien se puede hacer por la balanza hidrostatica.

Escolio. 2.° En las piedras preciosas el *quilate* es un peso de 4 granos, que es un tercio de tomin ó la 144 ava parte de la onza. Las piedras son tanto mas preciosas, cuanto mas duras, de mas brillo y menos manchadas. El diamante, el zafiro oriental, el rubí oriental, y el topacio oriental son las cuatro mas apreciables. El Diamante *rosa* es el chato, que solo tiene caras en un lado : el *brillante* tiene muchas caras por ambos lados. El diamante es de *buena agua*, cuando no tiene manchas, ni defecto.

El precio del *brillante* es un quinto mas que el del *rosa*, siendo iguales en lo demas ; si v. g un rosa de un quilate vale 10 pesos, un brillante del mismo quilate valdra 2 pesos mas, que son 12 pesos. Si los diamantes son de una misma agua y de diferentes quilates, se halla su precio de este modo. Sea un brillante de un grano de peso y que vale 6 pesos, y otro de 2 granos; para hallar el precio de este, multiplicaré sus quilates entre si, 2 por 2 que son 4, este producto multiplico por el valor del primer brillante que es 6 pesos, lo que da 24 pesos, y dire que este es el precio del brillante de dos granos. Si pesára 3 granos, multiplicaria 3 por 3 que son 9, y el precio 6 por 9, que da 54 pesos de precio *(Brisson)*. Del mismo modo se aprecian el Topacio, Zafiro y Rubí. El diamante de la Emperatriz de las Rusias pesa, segun *Chaptal*, 779 quilates, y le compro en doce barriles de oro.

Las perlas se valuan por su tamaño, siendo iguales en color y configuracion. Para ello se las hace pasar por los diferentes agujeros de la *quilatera*, que es un instrumento largo, con muchos agujeros redondos mayores y menores en proporcion. Tambien se pueden apreciar por el metodo anterior.

CORRESPONDENCIA DE ALGUNAS MEDIDAS LINEALES Y MONEDAS ESTRANGERAS CON LAS ESPAÑOLAS

Monedas inglesas. La *Guinea* (de oro) vale 5 *duros* 1 *real*, 1 *cuartillo*. Un *Chelin* de plata vale cerca de 2 *reales*.

Medidas lineales inglesas. El *Foot* ó *Pie* vale 1 pie, 1 pulgada españoles. La *Yarda* tiene 3 pies ingleses y vale 1 *vara*, 3 *pulgadas* y 3 *lineas* españolas. La *Milla* vale 0,28885 de legua española.

Monedas francesas. Un *Luis doble* vale 9 duros, 3 reales, 1 medio con mínima diferencia. Un *Luis simple* vale 4 duros, 5 reales y medio. Un *Franco* vale 1 real y medio y un quinto de medio; 5 francos hacen un duro.

Medidas lineales antiguas francesas. Un *pie de Rey* vale 1 pie, 2 pulgadas españoles con la mayor aproximacion. La *Toesa* tiene 6 pies de rey, y vale 2 varas y tercia muy poco mas. La *Ana* ú *ona* vale 1 vara, 1 tercia y 3 pulgadas. La *legua comun* tiene 2283 toesas.

NUEVO SISTEMA DECIMAL DE MEDIDAS

INVENTADO POR LOS FRANCESES. [a]

El *Metro* es la diezmillonesima parte del cuadrante del merediano terrestre, que pasa por el observatorio de Paris; vale 3, 5889216 pies españoles, que son 1 vara, 7 pulgadas y cerca de 1 linea. El metro es la unidad de longitud. La unidad de superficie es la *Ara*, y es un cuadrado de à diez metros por lado. La unidad de solidez es la *Estere*, y es un metro cubico; quiero decir un dado de jugar que tiene un metro de largo, ancho y grueso. La unidad de capacidad se llama *Litre*, y es un cubo hueco que tiene por lado un décimo de metro. La *Grama* es la unidad de peso, y es igual á un cubo de agua destilada que tenga por lado un centesimo de metro. La moneda que sirve de unidad, pesa cinco gramas; su ley es de nueve décimos de plata y un décimo de cobre, y se llama *franco*.

Las unidades dichas se multiplican por 10, 100, 1000, 10000, &c con solo anteponerles los nombres griegos *Deca* (Diez), *Hecto* (ciento), *Kilo* [mil], y *mirya* [diez mil]; v. g. *Decámetro*, *Hectómetro &c.*

Las mismas quedan partidas por 10, 100, &c, con anteponerles las voces latinas *Deci*, *Centi*, *Mili &c*, v. g. *Decimetro*, *Centimetro.*

El *Grado* del meridiano terrestre, es para los Franceses la centesima parte del cuadrante de circunferencia, y tiene diez millones de metros: El Grado frances tiene 17, 944608 leguas

---

[a] Estas medidas y pesos fueron decretados por la convencion nacional en 7 de Abril de 1795.

españolas de à veintemil pies (b). El grado comun y recibido desde la antigüedad es la nonagesima parte del cuadrante de la circunferencia: este grado tiene 20 leguas españolas poco menos de un decimo de legua; 60 millas inglesas; 25 leguas comunes de Francia, segun el Diccionario Geografico de Vosgien, Busching, &c.

OPERACIONES EN DENOMINADOS.

Sumar denominados.

150. Probl. y resoluc. *Para sumar denominados*, se ponen los sumandos unos debajo de otros, de modo que formen columna las unidades de una misma especie; se tira una raya y se empieza à sumar por las unidades de la derecha que son las inferiores: si de la suma de estas resultan unidades superiores, se guardarán para sumarlas con la columna siguiente. Procédase del mismo modo con todas las columnas, y el numero que resulte debajo de la raya sera la suma pedida.

Ejemplo. Sumense 8 *varas*, 2 *tercias* y 8 *pulgadas*, con 7 *vs.* 1 *terc.* y 6 *pulg*, con 5 *vs.* 2 *terc.* y 5 *pulg.*

8 *vs.*	2 *terc.*	8 *pulg.*
7	1	6
5	2	5
22 *vs.*	0 *terc.*	7 *pulg.*

Colocaré los sumandos, como se ve à la margen, y sumo las pulgadas, lo que me da 19 *pulgadas*; pero como en 19 *pulg* hay 1 tercia y 7 *pulg.*, pongo el 7 y llevo 1 a la columna siguiente de las *tercias*: sumo estas juntamente con la 1 tercia que llevé, y tengo 6 *tercias* que componen 2 varas cabales, pongo 0 y llevo 2 varas; sumo las varas con las 2 que reservé, lo que me da 22 *varas*. Digo pues que la suma pedida es 22 *vs.* 7 *pulg.*

Demostracion. Hemos sumado todas las unidades ho-

(b) Mechain y Delambre terminaron en 1798 la célebre medicion del arco del meridiano terrestre comprendido entre Dunkerque y Barcelona.

mogeneas de que se componen los sumandos; luego hemos sumado estos.

Multiplicar denominados.

151. Probl. y resoluc. *Para multiplicar denominados*, recordaremos que (41) el producto es de la misma especie que el multiplicando; de ahí es, que si se buscan reales o pesos, el factor de su especie sera el multiplicando. Supuesto esto, ejecutese lo siguiente: 1.° Reduzcase el multiplicando á la menor de sus especies, y apuntese á continuacion del numero el nombre de las unidades ínfimas; reduzcase tambien el multiplicador à sus unidades de especie ínfima, y al numero que resulte pongasele por denominador el numero de veces que la unidad ínfima cabe en la primera unidad superior del multiplicador, y queda reducido el problema à multiplicar un entero por un quebrado. 2.° Se multiplicará, segun regla, el numerador por el multiplicando; este producto se partira por el denominador para sacar los enteros, cuyas unidades son las de especie inferior del multiplicando, las que se reduciran à las de especie superior, como se ha enseñado (75, 5.°); Si de la division del producto por el denominador hay resta, se valuará esta en unidades mas pequeñas que se contengan en las de especie ínfima del multiplicando.

Cuando el multiplicador se pueda simplificar, se simplificará antes de ejecutar la multiplicacion. Si el multiplicador se puede con facilidad reducir à decimal, como cuando el denominador es 2, 4, 5, 25, 50, 20, &c, se le reducira de facto, multiplicando sus dos tèrminos por aquel numero que multiplicado por el denominador, lo convierta en 10, 100, 1000 &c.; se multiplicará el nuevo numerador por el multiplicando, y al producto se le separan con la coma tantos guarismos de la derecha, como ceros tenga el denominador. Este procedimiento es mas elegante y sencillo, y da el resultado en decimales mistos.

Ejemplo 1.° *¿Cuanto importan 4 varas 2 pies, valiendo una vara 5 pesos, 2 reales?*

Aqui el multiplicando son 5 *ps.* 2 *rs.* que lo reduzco à 42 *rs*, que son sus unidades ínfimas: reduzco tambien á tercias el multiplicador lo que da 14; à este numero pongo por denominador 3, porque la tercia cabe 3 veces en la unidad superior del multiplicador que es la vara; tengo pues que multiplicar el entero 42 *rs.* por $\frac{14}{3}$, que ejecuto (121) multiplicando 42 por 14, lo que da 588 à quien, en vez de ponerle el denominador 3, le divido por este para sacar los enteros que aqui son los reales. El cociente es 196 reales, que reduzco á pesos, dividiendo por 8, y obtengo el producto 24 *pesos*, 4 *reales.*

5 *ps.* 2 *rs.* = 42 *rs.*
4 *vs.* 2 *terc* = $\frac{14}{3}$

```
  1 6 8
  4 2
  -----
  5 8 8 | 3
  2 8     1 9 6 rs = 24 ps. 4 rs,
    1 8
```

Ejemplo 2.° *¿Cuanto importan 1 arroba, 7 libras, de cacao, a 3 pesos, 6 rs. y 1 medio la arroba?*

Reducire ante todo el multiplicando à 61 medios y el multiplicador a $\frac{32}{25}$, y multiplicaré uno por otro; pero observo que multiplicando el denominador 25 por 4, se convertira en 100, y para no alterar el quebrado, hare lo mismo con el numerador 32, lo que dara 128. Multiplico ahora el 128 por 61, lo que da 7808 medios; de este producto separo á lá derecha dos guarismos, porque tenia que dividirse por 100, y sera el producto pedido 78, 08 *medios* = 4 *pes.* 7 *rs.*

Ejemplo 3.° *¿Cuanto ganan 9728 pesos al año, en el supuesto de que por cada 100 se hande dar de ganancia, o interes 4 pesos, 2 reales y medio?*

Para resolver la cuestion, veremos primero cuantos cientos hay en 9728; ó lo que es lo mismo, deberemos partir dicha cantidad por 100, y el cociente multiplicar por el inreres 4 pesos, 2 reales y 1 medio, ò por 69 medios. Para partir por 100 un numero, basta correr la coma dos lugares acia izquierda; luego tendremos el cociente 97, 28 $\times$ 69 *med* = 6712,32 *medios*, que son 419 *pesos*, 4 *reales y* 0, 16 de real.

Ejemplo 4.° Un terreno, cuya figura es un rectangulo como la de un medio pliego de papel, tiene por longitud 35 varas 2 tercias, y por latitud 12 varas 1 cuarta: Se pregunta, ¿cuantas varas cuadradas tiene de superficie?

En esta cuestion es indiferente tomar por multiplicando cualquiera de los factores, porque ambos son de una misma especie: Si tomo por multiplicando el 35 varas, 2 tercias, lo reducire á 107 tercias, y el multiplicador á $\frac{49}{4}$ y procedere segun regla. Pero en este y otros casos de medicion de tierras, mejor es representar los denominados en quebrados abstractos y ejecutar la multiplicacion; asi en nuestro caso sera $\frac{107}{3} \times \frac{49}{4}$ igual á 436 varas cuadradas $+ \frac{11}{12}$ de vara cnadrada.

Demostracion. Reducimos el multiplicando à la menor de sus especies, v. g. en el primer ejemplo los pesos á 42 reales, para facilitar el calculo; por la misma razon reducimos el multiplicador á sus unidades ínfimas, que son 14 tercías ò pies. El multiplicador representamos en numero abstracto, poniendole por denominador la tercia espresada en guarismo; lo uno, porque (41) de facto es numero abstracto; lo otro, para que el calculador tenga à la vista el quebrado, por si lo puede convertir en decimal, que es á lo que debe propender cuando pueda. Lo demas nada tiene que demostrar, pues se reduce à multiplicar un entero cual es el 42 reales [35] por un quebrado, y sacar los enteros del quebrado impropio, todo lo que ya hemos demostrado atras.

Restar denominados.

152. Problema y resolucion. *Para restar denominados*, se colocan las unidades del sustraendo debajo de las de su especie del minuendo, tirese una raya y comienzese á restar por las inferiores que estan á derecha. Si el numero inferior se puede restar del superior, pongase la resta debajo de la raya; sino se puede, tomese de la especie inmediatamente superior del minuendo una unidad, reduzcase â las de la especie de que se trata, sumense con estas y de la suma restense las del sustraendo. Si en la columna inmediata de especie superior no hay ninguna unidad, se tomará de la que antecede hasta llegar donde la haya. Esta unidad se descompone en las inmediatamente inferiores, de las que se toma una, y las que queden se escribiran en la columna à que pertenecen; la unidad que se tomó, se descompone en las inferiores siguientes, y de estas se toma una, asentando las que queden encima de su columna: Si la unidad, que ultimamente se toma, contiene inmediatamente à las del numero de que se trata, descompongase en estas, sumense con las que hay y ejecutese la resta. Al restar del guarismo, de quien se tomó la primera unidad, se le rebajará esta.

Ejemplo. Pedro debia 12 *arrobas*, 10 *libras y* 8 *adarmes* de plata; y ha pagado 9 *arrobas*, 12 *libras*, 8 *onzas y* 12 *adarmes*: Se pregunta ¿Cuanto resta?

	25	15	16
12 *arrob.*	10 *lib.*	0 *onz*	8 *adarm.*
9	12	8	12
2 *arrob.*	22 *lib.*	7 *onz.*	12 *adarm.*

Colocados el minuendo y sustraendo, como se ve en el prospecto, empiezo à restar los adarmes, y digo: Quien de 8 quita 12, no puede ser; me presto de las onzas una onza, pero como ninguna onza hay, tomo de las libras una; la convierto en 16 onzas, de las que tomo una y escribo las 15 que quedan en la columna de las onzas sobre un parentesis: la onza que tomè reduzco â 16 adarmes, que los sumo, diciendo: 6 y 8 son 14, quien de 4 quita 2, restan 2, que escribo en su lugar; 1 y 1 que llevaba, son 2: quien de 2 quita 1, resta 1. Paso à la columna de las onzas, y digo: de 8 á 15 van 7; voy á la columna de las libras, y rebajando 1 que me presté del 10, digo: de 12 à 9, no puede ser; me presto una arroba del numero de las arrobas, la reduzco à 25 libras, y las sumo con las 9 que tengo, diciendo: 5 y 9 son 14, quien de 4 quita 2, restan 2; 2 y 1 que llevaba son 3, quien de 3 quita 1, restan 2. Digo pues que Pedro debe ó resta 2 *arrobas*, 22 *libras*, 7 *onzas*, 12 *adarmes*.

153. *Demostracion.* Hemos hallado la diferencia que hay entre cada una de las partes, de que se componen los denominados; luego hemos hallado la diferencia de estos.

Dividir denominados.

Problema y resolucion. *Para dividir denominados*, reduzcase el divisor à la menor de sus especies, y al numero que resulte pongase por denominador el numero de veces que la unidad infima cabe en la primera superior, y tendremos reducido nuestro caso al de dividir un entero por un quebrado. Ahora aqui se nos ofrecen dos metodos: 1.° Dividir las unidades superiores del dividendo por el numerador del divisor; si hay resta, se reduce á las unidades de especie inmediata inferior, se añade à estas y la suma se parte por el numerador; lo mismo se hace con las demas unidades. Despues se multiplica el cociente por el denominador, y este producto sera el cociente verdadero.

2.° Que nos parece mas espedito, y conforme à la regla general dada en los quebrados abstractos, y es el siguiente: Multipliquese el dividendo por el denominador del divisor, empezando por las unidades inferiores de aquel, para irlas reduciendo à las superiores. Partase en seguida cada especie del dividendo por el numerador del divisor, empezando por la especie superior; si hay resta, reduzcase á las unidades inferiores siguientes, sumese con ellas, y esta suma dividase; hagase lo mismo con las demas especies, y el cociente sera el pedido.

Ejemplo 1.° 3 varas y 1 cuarta de paño han importado 25 pesos, 3 reales y 1 medio: se quiere saber el importe de cada vara. Este caso pertenece (75) al 4.° uso de la division.

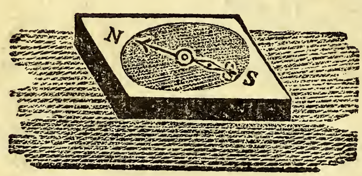
25 *ps.* 3 *rs.* 1 *med.* | 3 *vs.* 1 *cuar* $= \frac{13}{4}$
4
101 *ps.* 6 *rs.* 0 *m.* | 7 *ps.* 6 *rs.* 1 $\frac{3}{13}$ *medios.*
10
8
86 *rs.*
8
2
16 *med.*
3

Reduzco el divisor á las unidades de especie inferior, lo que da 13 *cuartas*, y pongo al 13 por denominador el 4. Multiplico por 4 todas las unidades del dividendo, empezando por los medios, y reduciendo los medios à reales, los reales à pesos, tengo el producto 101 *pesos*, 6 *reales*. Divido 101 pesos por 13, pongo el cociente 7 pesos y me sobran 10; estos reduzco á reales y sumo con los 6, lo que me da 86 reales: divido los reales, pongo el cociente 6 reales, y me sobran 8, que los reduzco 16 medios; parto los medios y me resulta 1 medio, mas 3 trezeavos de medio que los desprecio. Digo pues, que cada vara de paño costó 7 *pesos*, 6 *reales* y *medio.*

Ejemplo 2.° ¿Con 17 pesos 4 reales, cuantas varas de paño se podran comprar, costando la vara 3 pesos 6 reales?

Esta cuestion pertenece al primer uso de la division (75), pues equivale á averiguar en abstracto, cuantas veces 3 *ps.*, 6 *rs.* cabe en 17 ps., 4 *rs*; y como à cada vez que cabe corresponde una vara, se sustituirán las varas en las unidades del cociente. Dividiremos pues 17 *ps*, 4 *rs.* por 3 *ps*, 6 *rs.* como hemos enseñado; y el cociente 4 + 2 tercios de peso será igual à 4 *varas*, 2 *tercias* que se podran comprar.

Demostracion. El divisor, despues de reducido á sus unidades inferiores, le ponemos en espresion de quebrado abstracto, para facilitar el calculo. Todo lo demas está ya demostrado en el problema (128) de dividir un entero por un quebrado.



PARTE 2.ª

DE LA

ARITMETICA.

ELEVACION AL CUADRADO O 2.ª POTENCIA

Y ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA.

154. Se llama *Cuadrado o segunda potencia de un numero*, *el producto que resulta de multiplicar dicho numero por si mismo.* Asi, si multiplico 2 por 2 de esta suerte $2 \times 2 = 4$, el 4 sera el cuadrado ó segunda potencia de 2; se dice *segunda potencia* del 2, porque este está dos veces de factor: La operacion por medio de la que se ejecuta esto, se llama *elevacion al cuadrado.* La elevacion al cuadrado es un caso particular de la multiplicacion, en que los dos factores son por necesidad iguales, y es el tercer modo de aumentar.

Se dice *raiz cuadrada o segunda de un numero*, *aquel otro que multiplicado por si mismo produzca al primero*; asi 2 es la raiz cuadrada de 4; 5 es la raiz cuadrada de 25, porque 5 por 5 da 25. Para indicar que un numero, v. g. 2, se hade elevar al cuadrado, se le pone un 2 á la derecha un poco elevado, de esta suerte 2^2. Para denotar que se ha de estraer la raiz cuadrada de un numero, v. g. del 4, se pone una *V* consonante, tirando una raya de la pierna derecha, y poniendo debajo de la raya el numero, cuya raiz se va á estraer, de este modo $\sqrt{4}$; este signo se llama signo *radical.* La estraccion de la raiz cuadrada es contraria á la elevacion al cuadrado; y como la elevacion es un caso particular de la multiplicacion, la estraccion sera un caso particular de la division, á saber, cuando el cociente y el divisor son iguales. De aqui es, que la estraccion de raices es el tercer modo de disminuir. Como los cuadrados de los numeros dígitos estan en la tabla pitagórica, y su formacion es muy llana; vamos á observar la formacion del cuadrado de los numeros compuestos.

Observaciones. 1.ª *El cuadrado de un numero que contiene dos partes, v. g. decenas y unidades, se compone de tres partes, que son: cuadrado de decenas, duplo de decenas por unidades, y cuadrado de unidades.*

Con efecto, cuadremos el 23 y observemos los productos parciales de que se compone el total, ó cuadrado 529. El 3 multiplicamos por 3, con lo que le cuadramos, y tenemos 9 *cuadrado de unidades.* El 3, que son unidades, multiplicamos por 2 decenas, y tenemos el producto de decenas por unidades, que es 6; despues el guarismo 2 decenas de debajo multiplicamos por el 3 unidades de encima, y nos viene otro 6 producto decenas por unidades; ó lo que es lo mismo, tenemos dos veces el producto de decenas por unidades, ó *el duplo de decenas por unidades.* Finalmente, multiplicamos 2 decenas de abajo por 2 decenas de arriba, que es cuadrarlas, y nos da 4 *cuadrado de decenas.* Como las mismas tres partes sacaríamos, aunque el numero contubiese decenas, centenas, millares &c, pues estos los consideraríamos como decenas; se deduce la verdad de la observacion.

		2	3
		2	3
		6	9
	4	6	
	5	2	9

2.ª *El cuadrado de unidades primitivas comienza del primer lugar de izquierda y no pasa del segundo*; porque el menor cuadrado de unidades es 1 × 1 = 1, que está en primer lugar, y su mayor cuadrado es 9 × 9 = 81, que no pasa del segundo lugar; luego el cuadrado de unidades puede ocupar cuando mas el primer par de lugares. *El cuadrado de decenas empieza desde el tercer lugar y no pasa del cuarto*; porque el menor cuadrado de decenas es 10 × 10 = 100, que empieza desde el tercer lugar, y su mayor cuadrado es $90 \times 90 = 8100$, que no pasa del cuarto; luego el curdrado de decenas cuando mas puede ocupar el segundo par de lugares. Del mismo modo demostrariamos, que el cuadrado de centenas comienza desde el quinto lugar y no pasa del sesto, ó que puede ocupar cuando mas el tercer par; que el cuadrado de millares, &c.

3.ª *El duplo de decenas por unidades cuando menos espresa decenas, y por lo mismo comienza desde el segundo lugar, contando de derecha a izquierda*; porque el menor duplo de decenas por unidades es $2 \times 10 = 20$, que son 2 decenas. El duplo de centenas por decenas, cuando menos espresa millares, y por consiguiente comienza desde el cuarto lugar; porque $2 \times 100 \times 10 = 2000$; el duplo de centenas por millares comienza desde el sesto lugar. En general los duplos comienzan desde el segundo lugar del par, que corresponde al cuadrado de las unidades, por quienes se multiplica el duplo de las otras unidades superiores.

155. Problema: *Estraer la raiz cuadrada de un numero.*

Resolucion. 1.° El cuadrado, ó cualquiera numero dado, se coloca á la izquierda, y á su derecha las rayas de dividir; empezando de derecha, se separan con comas los guarismos en períodos de à dos, aunque en el ultimo período quede solo un guarismo. 2.° Hallese por la tabla pitagórica la raiz cuadrada esacta ò prócsima de la primera division de izquierda; es decir, búsquese un numero que multiplicado por sí, produzca esacta ó procsimamente el numero que està en el primer período izquierdo; aquel numero ó raiz pongase en las rayas de dividir: cuadrese la raiz, y su cuadrado restese abreviadamente del primer período. 3.° Al lado de la resta, si la hay, bájese el período siguiente, y sepárese con una coma el ultimo guarismo de derecha: duplíquese la raiz hallada, y el producto colóquese debajo de lo que está à izquierda de la coma, en la reunion de resta y período que se bajó; divídase el numero separado á izquierda por el producto que tiene debajo, el cociente escríbase en las rayas de dividir à continuacion del guarismo anterior, al lado del divisor y debajo de sí mismo: multiplíquese el divisor junto con el cociente por el mismo cociente, y el producto réstese de la resta reunida al período que se bajó. Al lado de la resta bàjese el período siguiente, y sepàrese con una coma el guarismo de las unidades; duplíquese toda la raiz hallada, el duplo póngase debajo de lo separado á izquierda; divídase esto por el duplo, y el cociente escríbase en la raiz, al lado del divisor y debajo de sí mismo, y hagase todo lo demas que arriba hemos prescrito. Asi se continúa hasta haber bajado el ultimo período.

4.° Cuàndo la resta junto con el guarismo del período que se bajó, no se puede dividir por el duplo de la raiz hallada, se pone cero en la raiz y se baja el período siguiente: se le separa el guarismo de las unidades, y se ejecuta lo demas.

5.° Cuando queda resta al fin de la operacion, no se espere hallar jamas raiz esacta en enteros, ni quebrados. Pero se puede aprocsimar. 1.° por quebrado comun, de este modo: al lado de la raiz sacada póngase un quebrado, que tenga por numerador la ultima resta, y por denominador el duplo de toda la raiz hallada y mas la unidad; 2.° por decimales, que es lo mejor, de esta suerte: supongase que el numero, cuya raiz se estrae, tiene á derecha despues de una coma cuantos períodos se quieran de à dos ceros; y operese segun reglas dadas, bajando dos ceros y añadiendolos à la resta ultima, &c. La raiz que de aqui resulte sera guarismo decimal, que se escribira despues de la coma, que se debe poner á derecha de la raiz sacada.

Ejemplo 1.° Estraygase la raiz cuadrada del numero

54756, que indicaremos como se ve al lado.

Separo con comas de dos en dos guarismos, comenzando de la derecha. Busco despues un numero, que multiplicado por sí produzca 5, que es el primer período izquierdo; y hallo que es 2; lo escribo en las rayas, y lo cuadro diciendo: 2 veces 2 son 4, y resto el 4 del 5, diciendo: de 4 á 5 va 1. Al lado del 1 bajo el 47 y separo con una coma el 7; duplico el guarismo 2 de la raiz, lo que da 4, que pongo debajo del 14: este divido por 4 y digo: 4 en 14 cabe 3 veces, pongo 3 en la raiz à continuacion del 2, al lado del duplo 4, y debajo de sí mismo y tiro una raya: multiplico el 43 por 3, el producto 129 resto de 147, y tengo la resta 18. Al lado del 18 bajo el período siguiente 56 y separo el 6 con la coma; duplico el 23 de la raiz, y el duplo 46 asiento debajo del 185; parto este numero por 46, diciendo: 4 en 18 cabe 4 veces, que escribo en la raiz, al lado del 46, y debajo de sí mismo; multiplico ahora el cociente 4 por 464, y el producto 1856 resto del 1856 de arriba, lo que me da 0 diferencia. Digo, pues, que la raiz cuadrada de 54756 es esactamente 234.

$\sqrt{5,47,56}$ | 234

14,7

4 3

3

129

0185,6

46 4

4

1856

0000

Ejemplo 2.° La raiz cuadrada de 7 es 2 y sobran 3. Si aprocsimo por quebrado comun, escribire al lado de la raiz 2 la resta 3, y le pongo por denominador el duplo de la raiz hallada 2, que es 4 y mas 1, que es 5; de modo que la raiz aprocsimada sera $2 + \frac{3}{5}$.

$\sqrt{7} = 2,63$ &c.

30,0

46

6

276

240,0

523

3

1569

831

Si quiero aprocsimar hasta el infinito, lo hare por decimales; para ello añado dos ceros à la resta 3, y ejecuto lo demas conforme à regla, y segun se ve á la ma gen.

Demostracion. Razonemos sobre el numero 54756. Al momento que veo en este numero mas de dos guarismos, infiero que su raiz tiene decenas y unidades; porque si tubiera solo unidades, su cuadrado no pasaria (*observ.* 2.ᵃ) del primer par contado de derecha à izquierda. Si contiene la raiz decenas y unidades, en dicho numero habra las tres partes, que son cuadrado de decenas, duplo de decenas por unidades, y cuadrado de unidades; pero el cuadrado de decenas empieza desde el 2.º par; luego para hallar su raiz no necesitamos del primer par, que por tanto lo separamos, y tenemos 547, 56. El cuadrado de decenas no pasa del 2.º par de guarismos; pero aqui hay tres guarismos; luego en la raiz habra centenas, y en el numero propuesto habra tambien cuadrado de centenas y duplo de centenas por decenas: ahora, como el cuadrado de centenas comienza desde el tercer par, no necesitamos del 2.º para sacar las centenas de la raiz, y asi lo separamos con la coma de esta manera 5, 47, 56. Del mismo modo discurririamos, si hubiera mas guarismos. De este procedimiento se infiere, que *cuantos periodos haya en un numero, tantos guarismos habra en su raiz.*

En el tercer periodo 5 del numero 5, 47, 56 está, por lo dicho, el cuadrado de centenas, luego su raiz 2 seran las centenas; ahora su cuadrado 4 restamos del 5, para ver las unidades que puede haber de mas por causa de la suma, y reunirlas à las otras partes del cuadrado.

Las otras dos partes del cuadrado de centenas y decenas son el duplo de centenas por decenas, y el cuadrado de decenas; y como el cuadrado de decenas comienza desde el 2.º par, se deduce que estas dos partes se hallan en el período 47 junto con la resta 1, esto es, en 147. El duplo de centenas por decenas comienza (*obs.* 3.ª) desde el segundo guarismo del par que corresponde al cuadrado de las decenas ; y como este guarismo es el 4 , resulta que dicho duplo está contenido en el 14 , por lo que le separamos con la coma. Si el 14 es un producto , cuyos factores son el duplo de centenas , y las decenas ; podemos facilmente hallar el factor decenas , dividiendo (65) el producto 14 por un factor conocido , cual es el duplo de las 2 centenas sacadas ; por esto es , que se ha duplicado el 2 , por su duplo se ha dividido el 14 , y el cociente 3 se ha puesto al lado de las 2 centenas.

Volvemos à formar las dos partes multiplicando 3 por 3 , lo que dà el cuadrado de decenas : y 3 por el duplo 4, lo que da el duplo de centenas por decenas. La reunion de estas dos partes restamos del numero 147 , donde se hallan, para ver las unidades que tiene demas , y sumarlas con las otras partes que restan del cuadrado : estas son duplo de decenas por unidades y cuadrado de unidades, considerando el duplo de centenas y decenas , como duplo de decenas solamente.

Como el cuadrado de unidades comienza desde el primer guarismo àcia izquierda , y el duplo de decenas por unidades desde el segundo : se sigue que en el periodo 56 reunido á la resta 18 estaran contenidas estas dos partes , y que el dúplo se hallará en 185. Si este numero dividimos por el un factor , cual es el duplo de decenas 2 $\times$ 23 , nos vendra el cociente 4 unidades , que las escribiremos en la raiz ; despues formaremos las mismas partes , y las restaremos , para ver las unidades que puede haber demas , si el numero no es cuadrado perfecto.

Cuando el cuadrado es inesacto , hemos dicho que se aprocsime por un quebrado , cuyo numerador sea la resta final y el denominador el dúplo de la raiz hallada mas la unidad. La razon es , porque *los cuadrados de dos numeros que se diferencian en la unidad , se diferencian en el duplo del menor* *mas la unidad*; Sean, por ejemplo, los numeros 3 y 4 que se diferencian en 1; sus cuadrados son 9 y 16, y la diferencia de estos es 7, que es igual à $2 \times 3 + 1$. De aqui es, que en el segundo ejemplo la raiz de 7 es mayor que 2 y menor que 3; y como el cuadrado de 3 escede al de 2 en el duplo del mismo 2 mas la unidad, ó en 5; se sigue que la resta 3 debe espresar partes de las que le faltan, para llegar à ser la raiz del de una unidad mas, que aqui son las 5.

La aprocsimacion por decimales se funda, en que à todo numero se le puede poner à continuacion de la coma los ceros que uno quiera (138), sin que por esto se altere. A mas de esto, los ceros deben ser pares, porque si la raiz tiene un cero decimal, el cuadrado tendra dos; si tiene tres ceros, el cuadrado tendra seis, pues el producto debe tener tantos guarismos decimales, como hay en cada factor.

Escolio. Se conocera si se ha puesto demas en la raiz; cuando el cociente multiplicado por el divisor y por si mismo, dé un producto que no se puede restar de la resta anterior reunida al período que se bajò. *Se sabra que la raiz es menor, cuando la resta que queda, sea igual o mayor que el duplo de la raiz hallada mas la unidad*; porque en este caso la resta sera el ecceso de un cuadrado, cuya raiz tenga una unidad mas. Asi, si pongo 2 por raiz de 9, cuadrando el 2 y restando el cuadrado 4 de 9, me vendra 5 de resta; y como $5 = 2 \times 2 + 1$, deduzco que la raiz debe tener una unidad mas, cual es el 3.

156. Problema y resolucion. *Para elevar un quebrado al cuadrado*, se elevan por separado su numerador y denominador; porque para multiplicar un quebrado por si mismo, se debe multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador. Asi el cuadrado de $\frac{3}{5}$ es $\frac{9}{25}$; el cuadrado de 3, 5 es $3,5 \times 3,5 = 12,25$.

157. Problema y resolucion. *Para estraer la raiz cuadrada de un quebrado*, se estrae por separado la del numerador y la del denominador ; porque para elevarlo al cuadrado, elevamos el numerador y denominador, y como la estraccion de la raiz es contraria â la elevacion, deberemos hacer lo contrario à esta. *Ejemplo.* Estraygase la raiz cuadrada de $\frac{9}{25}$, y sera $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ igual a $\frac{3}{5}$.

Cuando ninguno de los terminos del quebrado tenga raiz esacta, haremos que el denominador la tenga multiplicando ambos terminos por el denominador ; y despues se estrae aprocsimadamente la raiz del numerador, y esactamente la del denominador, porque à este se le cuadrò con el hecho de multiplicarlo por si mismo. Ya sabemos que un quebrado no se altera, cuando se multiplican sus dos terminos por un mismo numero. Si solo el numerador tiene raiz esacta, mas no el denominador, trataremos siempre de que este la tenga, para que la espresion sea mas sencilla.

Ejemplos. La raiz cuadrada de $\frac{7}{8}$ es $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$; y como no se puede sacar esactamente de ningun termino, multiplicaremos los dos terminos por 8, lo que dara $\frac{56}{64}$; Sacaremos ahora la raiz aprocsimada del numerador y esacta del denominador, con lo que tenemos la raiz pedida igual á $\frac{7,48\ \&c.}{8}$

RAZONES Y PROPORCIONES GEOMETRICAS.

158. Antes de esponer esta teoría, es conveniente saber que se llama *igualdad o ecuacion* toda espresion, en que las cantidades estan separadas por el signo de igualdad ; asi $3 = 5 - 2$, $2 \times 8 = 4 \times 4$, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, son ecuaciones. Las canti-

dades que estan á izquierda del signo =, se llaman *primer miembro*, y *segundo miembro* las que estan à derecha; en la 1.ª ecuacion 3 es el primer miembro, y el segundo son 5—2. Conviene tambien recordar el axioma 6.º: *Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados seran iguales*; en virtud de este axioma si sumamos ò restamos de cada miembro una misma cantidad, ó si multiplicamos ó partimos cada miembro por una misma cantidad, siempre permanecera la misma ecuacion. Supuesto esto, espongamos ya las razones y proporciones.

159. Se llama *razon geometrica la comparacion de dos numeros, con el fin de saber cuantas veces el uno contiene al otro*; por consiguiente, no es mas que *la division indicada de un numero por otro*, asi $\frac{4}{2}$ ò 4 : 2, es la razon que tiene el 4 con el 2. Como todo quebrado sea propio ò impropio es una division indicada, se sigue que todo quebrado es una razon del numerador con el denominador. Al dividendo se llama *antecedente*; al divisor *consecuente*, à ambos juntos se les llamà *terminos* de la razon. El cociente que resulta se dice *esponente* de la razon. Para escribir una razon geometrica, usaremos mas comunmente de los dos puntos, pero al topar con estos no diremos *dividido por*, sino *es a*; v. g. 4 : 2 se leerá 4 *es a* 2.

Como la razon geometrica no es mas que una division indicada ò un quebrado; se sigue que *una razon no se altera, aun cuando se multipliquen o partan sus dos terminos por un mismo numero* (97). De aqui es que 4 : 2 es lo mismo que 8 : 4 y que 2 : 1.

Se dice que una razon es *inversa* ó *reciproca* respecto de otra, cuando el antecedente de la una es consecuente de la otra; asi 4 : 2 es inversa de 2 : 4 Cuando no hay esta circunstancia, la una razon se dice directa respecto de la otra.

Razon compuesta es la que proviene de multiplicar dos ó mas razones entre sí : *razones componentes* son las que sirven de factores, Si multiplico $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, ò la razon 2 : 3 por la 4 : 5, multiplicarè numerador por numerador y denominador por denominador, y tendre el producto $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$, que escribiendo la razon con los dos puntos sera 2 X 4 : 3 X 5. De donde se deduce que *para multiplicar dos o mas razones entre si, se multiplicaran ordenadamente todos los antecedentes y todos los consecuentes*. Razon *duplicada* es el cuadrado de otra, ò la que proviene de multiplicar una razon por sí misma; asi 4 : 9 es razon duplicada de 2 : 3.

160. *Proporcion geometrica es la igualdad o ecuacion de dos razones geometricas*; asi $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ es una proporcion geometrica. Para escribir una proporcion geometrica, se pone la division indicada con los dos puntos, en vez del signo = se escriben cuatro puntos, y despues la otra razon igual; Asi la proporcion de arriba escribiremos de esta manera, 8 : 4 :: 6 : 3. Para leer la proporcion geometrica, al llegar a los cuatro puntos se pronunciará la voz *como*; v. g. 8 : 4 :: 6 : 3 leeremos asi : 8 *es* á 4 *como* 6 *es a* 3.

Como proporcion es igualdad de razones, y cada razon tiene dos terminos; se sigue, que toda proporcion consta de cuatro terminos. Al primero y ultimo terminos se les llama *estremos*; al segundo y tercero se les nombra *medios*.

A mas de esto la proporcion es *discreta*, cuyos medios son diferentes : y *continua*, cuyos medios son iguales; 8 : 4 :: 6 : 3 es proporcion discreta; 8 : 4 :: 4 : 2 es proporcion contínua. Para formar una proporcion discreta con facilidad se pone por primera razon una cualquiera, y por segunda la primera despues de multiplicar ò partir sus dos terminos por un mismo numero;

Para escribir la proporcion contínua, cuando no haya mas fin que espresarla con prontitud y sin quebrados, se pone por primer termino un numero cualquiera; por 2.° y 3.° un multiplo del 1.° y por 4.° el mismo multiplo del 3.° Por *ejemplo*, escribo el primer termino 5, duplico este y pongo 10 por segundo y tercero, y duplicando el 10 pongo el duplo 20 por cuarto termino, como se ve aqui, 5 : 10 :: 10 : 20. La proporcion contínua se escribe abreviadamente asi, ∺ 5: 10 : 20, y se lee abreviadamente 5 *es a* 10 *es a* 20.

161. Teorema fundamental. *El producto de los estremos es igual al producto de los medios en la proporcion geometrica discreta, y al cuadrado del termino medio en la continua.*

Esplicacion. Sea la proporcion discreta 8 : 4 :: 6 : 3; voy à demostrar que $8 \times 3 = 4 \times 6$.

Demostracion. Como proporcion es igualdad de razones, y toda razon es un quebrado, tendremos que la proporcion antecedente sera $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, y reduciendo los quebrados á un comun denominador, tendremos $\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4 \times 6}{4 \times 3}$. Si ambos miembros de la ecuacion multiplicamos por un mismo numero, no se alterara la ecuacion (158); multipliquemoslos pues por el denominador 3×4, para lo que basta suprimirlo en ambos miembros (108. *Cor.* 2.°), y nos resultara $8 \times 3 = 4 \times 6$. L. Q. D. D.

Si la proporcion es contínua, tal como 5 : 10 :: 10 : 20, tendremos $\frac{5}{10} = \frac{10}{20}$; reduciendo los quebrados á un comun denominador sera $\frac{5 \times 20}{10 \times 20} = \frac{10 \times 10}{10 \times 20}$, y multiplicando cada quebrado por su denominador, resultara $5 \times 20 = 10^2$. L. Q. D. D.

162. Teorema. *Si cuatro numeros son tales, que el producto*

de dos de ellos sea igual al producto de otros dos, dichos numeros estaran en proporcion geometrica; pero de modo que si los factores de un producto forman los medios, los otros han de formar los estremos, y al contrario.

Esplicacion. Sea la ecuacion $3 \times 6 = 2 \times 9$; Voy à demostrar, que con estos cuatro factores puedo formar la proporcion $3 : 2 :: 9 : 6$, tomando por estremos el 3 y 6; ò la $2 : 3 :: 6 : 9$, tomando por estremos el 2 y 9.

Demostracion. Si ambos miembros dividimos por el producto de dos factores 2×6, tales que el uno se halle en el primer miembro y el otro en el segundo, no se alterará la ecuacion y tendremos $\frac{3 \times 6}{2 \times 6} = \frac{2 \times 9}{2 \times 6}$; y borrando factores comunes en cada miembro, resultará $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$, que puestos en proporcion, dan $3 : 2 :: 9 : 6$. Si dividieramos cada miembro por el producto de los otros factores 3 y 9, seria la ecuacion $\frac{3 \times 6}{3 \times 9} = \frac{2 \times 9}{3 \times 9}$, y suprimiendo factores comunes, la $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; que empezando la proporcion por el 2.° miembro, será $2 : 3 :: 6 : 9$.

163. Problema. *Dados tres terminos cualesquiera de una proporcion, hallar el 4.°*

Resolucion. Si el termino que se busca ó el incognito es un estremo, multipliquense los dos medios y el producto dividase por el otro estremo; si el incògnitó es un medio, multipliquense los estremos y el producto dividase por el otro medio.

Ejemplo. Llamando x el termino incognito ò que se busca, sea la proporcion $6 : 9 :: 2 : x$, en la que se dan tres terminos conocidos y se busca el cuarto, que es un estremo. Multiplico entre sí los medios 9 y 2 y el producto 9×2 divido por el otro estremo 6, lo que da $x = \frac{9 \times 2}{6} = 3$, termino pedido.

Demostracion. En virtud del teorema (161) tenemos

$6 \times x = 9 \times 2$, si dividimos ambos miembros por el factor 6 no se alterarà la ecuacion (*Ax.* 6.°) y tendremos $\frac{6 \times x}{6} = \frac{9 \times 2}{6}$; y suprimiendo el factor comun 6 en el primer miembro, sera $x = \frac{9 \times 2}{6}$; luego el producto de los medios 9 y 2 se debe partir por el un estremo 6 para hallar el otro x. L. Q. D. D.

Si el termino incognito es un medio, sera v. g la proporcion 6 : x :: 2 : 3, de donde sale $2 \times x = 6 \times 3$; si dividimos ambos miembros por el factor 2, y lo suprimimos en el primer miembro, resultarà $x = \frac{6 \times 3}{2}$; luego para hallar el medio x, se multiplicaran los estremos, y el producto se partira por el otro medio 2.

164. Problema. *Dados dos terminos, hallar el tercero continuo proporcional.*

Resolucion. Cuádrese el segundo termino y el cuadrado dividase por el primero. *Ejemplo.* En la proporcion contínua ÷ 8 : 4 : x, hallese el tercer termino; cuadrare el 4, el cuadrado 16 divido por 8, y el cociente 2 es el termino pedido, y sera ÷ 8 : 4 : 2.

Demostracion. Por el teorema (161) tenemos que $8 \times x = 4^2$; partiendo ambos miembros por 8, y suprimiendo factores comunes, sera $x = \frac{4^2}{8}$. L. Q. D. D.

165. Problema. *Dados dos numeros, encontrarles un medio continuo proporcional.*

Resolucion. Multipliquense los numeros dados, y del producto estraygase la raiz cuadrada esacta ó aproximada, que sera el medio pedido. *Ejemplo.* Sea la proporcion ÷ 3 : x : 12, en que se trata de hallar el medio x: multiplicaré 3 por 12, que da 36, cuya raiz cuadrada es 6, y tendre ÷ 3 : 6 : 12.

Demost. Puesto que el producto de los estremos es lo mismo que el cuadrado del termino medio, para hallar este que es la raiz, sera necesario estraer la raiz cuadrada de dicho producto.

Transformaciones de la proporcion geometrica.

166. *Alternar una proporcion es comparar antecedente con antecedente y consecuente con consecuente*; v. g. la proporcion primitiva 6 : 9 :: 2 : 3 queda alternada de este modo 6 : 2 :: 9 : 3. Que la proporcion primitiva no se haya alterado es constante, porque el producto de los estremos es igual al producto de los medios [162]

Invertir es comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones; asi la primitiva 6 : 9 :: 2 : 3 queda invertida de esta manera 9 : 6 :: 3 : 2; que esto no varíe la proporcion, se hace claro, porque el producto de los estremos es igual al de los medios.

Permutar una proporcion es poner la 2.ª razon por 1.ª, y al contrario; asi la primitiva 6 : 9 :: 2 : 3 permutarè de esta manera, 2 : 3 :: 6 : 9. Como proporcion es igualdad de razones, no se altera dicha igualdad, ya sea que una razon se ponga à derecha del signo ==, en cuyo lugar estan los cuatro puntos, y la otra à izquierda, ó al contrario.

Razones y proporciones aritmeticas.

167. *Razon aritmetica es la comparacion de dos numeros con el fin de saber en cuanto escede el uno al otro*: por consiguiente no es mas que *una sustraccion indicada*, asi es 5 — 2; *antecedente* es el minuendo 5, *consecuente* el sustraendo 2, *esponente* de la razon la resta 3; el antecedente y consecuente son los terminos de la razon. Los Matematicos han convenido en escribir un punto en vez del signo — de este modo; 5 . 2, que se lee *5 es aritmeticamente a 2.*

Proporcion aritmetica es la igualdad de dos razones aritmeticas; asi 5 — 2 == 7 — 4, que se escribe poniendo dos puntos en vez del signo de igualdad, de este modo, 5 . 2 : 7 . 4;

y se lee : *5 es aritmeticamente a 2 como 7 a 4.* Cuando los terminos medios son un mismo numero, la proporcion es contínua; cuando diferentes, es discreta: la proporcion 8 · 5 : 5 · 2 es aritmetica contínua, que se escribe abreviadamente asi ÷ 8 · 5 · 2.

168. Teorema. *La suma de los estremos es igual a la suma de los medios en la proporcion aritmetica discreta, y al duplo del termino medio en la continua.*

Demostracion. Sea la proporcion aritmetica 5 · 2 : 7 · 4; si la ponemos en ecuacion, sera $5 - 2 = 7 - 4$, y si á cada miembro añadimos $+ 2 + 4$, no se altera (*ax.* 6.º) la ecuacion y tendremos $5 - 2 + 2 + 4 = 7 - 4 + 2 + 4$; destruyendo ahora las cantidades positivas (100) con las negativas, resulta $5 + 4 = 7 + 2$: pero 5 y 4 son los estremos, 7 y 2 los medios; *luego la suma* &c.

Si la proporcion es contínua, tal como ÷ 8 . 5 . 2, tendremos por lo acabado de demostrar, que $8 + 2 = 5 + 5$, ò lo que es lo mismo, $8 + 2 = 2 \times 5$; luego &c.

169. Teorema. *Si cuatro numeros son tales, que la suma de dos de ellos sea igual a la suma de los otros dos, con ellos se podra formar proporcion aritmetica; pero de modo que los dos sumandos de un miembro sean los medios y los otros dos los estremos, y al contrario.*

Demostracion. Sea la ecuacion $5 + 4 = 7 + 2$, voy á demostrar que puedo formar la proporcion 5 . 2 : 7 . 4; porque quitando de ambos miembros la suma de dos numeros tales, que cada uno se halle en un miembro, v. g. el 4 y el 2, tendremos $5 + 4 - 4 - 2 = 7 + 2 - 4 - 2$, y destruyendo las positivas con las negativas, resulta $5 - 2 = 7 - 4$; que puesta la igualdad de sustracciones indicadas en proporcion, da 5 . 2 : 7 . 4. L. Q. D. D.

Escolio. La proporcion aritmetica tambien se puede *alternar*, *invertir y permutar*, sin que deje de ser proporcion.

170. Problema. *Dados tres terminos de la proporcion aritmetica discreta, hallar el cuarto.*

Resolucion. Si es un estremo el incognito, súmense los medios y de la suma restese el otro estremo; si es un medio, súmense los estremos y de la suma réstese el otro medio.

Ejemplo, Sea el estremo x el que se busca en la proporcion $3 . 5 : 4 . x$; sumaré 5 con 4, y de la suma 9 resto el 3, lo que da la diferencia 6, termino pedido, y sera $3 . 5 : 4 . 6$.

Demostracion. Por el teorema (168) tenemos $x + 3 = 4 + 5$; si de ambos miembros restamos 3, y hacemos la destruccion de positivas y negativas, sera $x = 4 + 5 - 3$. L. Q. D. D.

Por un metodo análogo demostrariamos, que cuando el termino incognito sea uno de los medios, de la suma de los estremos se deberia restar el otro medio.

171. Problema. *Dados dos terminos de la proporcion aritmetica continua, hallar el tercero.*

Resolucion. Duplíquese el segundo termino, y del duplo restese el primero. *Ejemplo.* Para hallar el tercer termino en la proporcion $\div 5 . 7 . x$, duplicaré el 7, y del duplo 14 restaré el 5, lo que da 9, y tendre $\div 5 . 7 . 9$.

Demostracion. Puesta la proporcion en ecuacion es $5 + x = 2 \times 7$, y restando de cada miembro 5, sera $5 + x - 5 = 2 \times 7 - 5$, y haciendo la destruccion, resulta $x = 2 \times 7 - 5$. L. Q. D. D.

172. Problema. *Dados dos terminos, hallar un medio proporcional aritmetico.*

Resolucion. Súmense los estremos, y tómese la mitad de la suma. *Ejemplo.* En la proporcion continua $\div 5 . x . 9$, para hallar el medio x, sumo 5 con 9, y de la suma 14 tomo la mitad que es 7, termino pedido.

NOTA. En la Algebra, si Dios nos da vida, trataremos mas à fondo de las razones y proporciones. Aquí solo hemos puesto aquello, que es indispensable para entender la *regla de tres, de compañia, &c.* de que vamos à ocuparnos.

USOS DE LA PROPORCION GEOMETRICA.

Reglas de tres.

173. Para entender la regla de tres, propongamos la siguiente:

Cuestion. *Si* 4 *tejedores trabajan* 16 *varas de paño en un dia; se pregunta ¿ Cuantas varas trabajaran en el mismo dia* 8 *tejedores de igual destreza y robustez que los primeros?*

Resolucion. Supuesto que los tejedores son iguales en destreza y robustez, es evidente que si 4 de ellos trabajan 16 varas, duplicando su numero, se duplicará la obra, y por consiguiente 8 tejedores que son su duplo, trabajarán el doble de 16 que es 32 varas: 12 tejedores que son su triplo, trabajaran 3 veces 16 ò 48 varas; por el contrario, 2 tejedores, que son la mitad de los 4, tejeran la mitad de la obra, á saber 8 varas: un tejedor, que es la cuarta parte de los 4, tejera la 4.ª parte de 16, que es 4 varas. Luego en esta cuestion y sus semejantes tenemos, que el numero de veces que la una causa es mayor ò menor que la otra, es igual al numero de veces que el efecto producido por la primera es mayor ò menor que el efecto producido por la segunda.

Como la division de un numero por otro señala las veces que el dividendo es mayor ò menor que el divisor, segun sea el quebrado impropio ò propio; se sigue que $\frac{8\,t.}{4\,t.}$ sera el numero de veces que 8 tejedores es mayor que 4 tejedores, y (llamando x el numero de varas que se busca), $\frac{xv.}{16v.}$ sera el numero de veces que el efecto buscado es mayor que el efecto conocido 16 varas; y como estos numeros son iguales, tendremos la ecuacion $\frac{8\,t.}{4\,t.} = \frac{x\,v}{16v.}$; pero la igualdad de divisiones indicadas es una proporcion: luego la ecuacion anterior será la proporcion $8t.:4t.::xv.:16v$ (A), en la que nos es facil hallar el medio x, multiplicando los estremos 16 y 8, y partiendo el producto 128 por el otro medio 4, lo que da 32 varas numero pedido. La misma proporcion nos resultaria, si hubieramos dividido el numero menor de tejedores 4 por el mayor 8, y el numero menor de varas 16 por el mayor x.

174. Cuando una cuestion, como la acabada de esponer, se resuelve por medio de una proporcion, se dice que se ha resuelto por regla de tres; por manera que *Regla de tres es aquella que enseña a disponer en proporcion geometrica cuatro cantidades, de las que tres son conocidas y otra incognita.* En la cuestion propuesta antes se han dado tres cantidades conocidas, que son 4 tejedores, 16 varas, y 8 tejedores, y la incognita, que son las varas que se buscan.

De las cantidades que entran en la regla de tres, dos son homogeneas ò de una misma especie, y otras dos de otra misma especie; asi en dicha cuestion 4 tejedores y 8 tejedores son numeros de la 1.ª especie: 16 varas y x varas son los otros dos numeros de 2.ª especie.

175. Se llama *regla de tres simple* aquella en que solo entran tres cantidades conocidas; porque las razones, que forman la proporcion, son simples. Se llama *regla de tres compuesta*, cuando las cantidades conocidas son mas de tres; porque entonces una ò ambas razones de la proporcion han de ser compuestas, como despues veremos.

Para que una cuestion se pueda resolver por regla de tres, es necesario ver si los numeros dados y el que se busca son proporcionales: es decir, cuando dada una causa y su efecto, á dupla, tripla causa corresponda duplo, triplo efecto; ó à subdupla, subtripla causa corresponda subduplo, subtriplo efecto. Si no hay este aumento por via de multiplicacion, ó esta diminucion por via de division, no habrá regla de tres;

por ejemplo esta cuestion : si un hombre en un dia anda 6 leguas , ¿ cuantas leguas andaran 4 hombres de igual fuerza en el mismo dia ? no pertenece à la regla de tres ; porque al duplo , cuádruplo &c de hombres no corresponde el duplo , cuádruplo &c de leguas , pues tanto anda un hombre como 2 , 4 hombres , siendo iguales en el andar.

176. Se llama *regla de tres directa* , cuando á mayores causas corresponden mayores efectos , y à menores causas menores efectos ; y al contrario , à menores ò mayores efectos , menores ò mayores causas. Asi la cuestion propuesta al principio es directa , porque á menor numero de tejedores corresponde menor numero de varas , y à mayor numero de tejedores mayor numero de varas.

Se dice *regla de tres inversa* , cuando à mayor numero corresponde menor , y à menor numero corresponde mayor ; por ejemplo , *si 6 caballos en 4 dias comen 24 cargas de cebada; ¿ 12 caballos en cuantos dias comeran las mismas 24 cargas?* Es evidente , que cuanto mas sean los caballos , menos tiempo gastarán en comer las mismas cargas ; y cuanto menos sean ellos , mas tiempo gastarán en consumirlas. Ahora, como los 12 caballos son el doble de los 6 , el tiempo que gasten aquellos sera la mitad de los 4 dias que gastaron estos , esto es 2 dias : luego en està cuestion à 6 caballos corresponden 4 dias, y à 12 caballos corresponden 2 dias , es decir que à mayor causa corresponde menor efecto , y al contrario ; diremos pues que es una regla de tres inversa. Espliquemos por orden cada una de las diferentes reglas de tres.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA.

177. Despues de conocer por las reglas dadas (175 *y sig.*) que una cuestion pertenece à la regla de tres , porque tiene los datos y el incognito proporcionales : que esta regla de tres es simple,

por tener solo tres terminos conocidos, y que es directa, porque de mas se va á mas y de menos á menos; conviene saber disponer los terminos de la proporcion, la cual operacion se llama *plantear la regla de tres.* Como todas las cuestiones, que pertenecen à la regla de tres simple directa, se resuelven por el mismo raciocinio, que hicimos para resolver la primera cuestion de los tejedores (173); se deduce, que la formula [A] $8t. : 4t. :: xv. : 16v.$ nos suministrará una regla para su planteo. Para conseguirla, observemos la colocacion de los terminos de 1.ª y 2.ª especie, y trataremos siempre de que el termino incognito ocupe el ultimo lugar ácia derecha, por ser esto mas cómodo; observaremos á mas de esto, si el termino que se busca es mayor ò menor que el conocido de su especie.

Se advierte, que llamamos *primera especie* à los dos terminos conocidos que tienen un mismo nombre, asi en la formula (A) $8t.$ y $4t.$ son la primera especie; y decimos *segunda especie* al termino incognito y al conocido de su nombre, tales son $xv.$ y $16\,v.$ Supuesto esto, vamos à buscar una regla para el planteo, deduciendola de la formula anterior.

Con efecto, si invertimos la formula $8t. : 4t. :: xv. : 16v.$, tendremos $4t. : 8t. :: 16v. : xv.$ (1.ª). ; si esta proporcion alternamos, sera $4t. : 16v. :: 8t. : xv.$ (2.ª). Aqui observamos que el termino $xv.$ que se busca, debe ser mayor que el conocido de su especie $16v.$, y en este caso las proporciones (1.ª) y (2.ª) nos dan esta regla:

178. 1.ª *Para plantear una regla de tres directa simple, cuando el termino incognito sea mayor que el conocido de su especie, se hara esta proporcion;* el numero de la 1.ª especie : es à cualquiera de los otros dos terminos :: como el que queda: es al incognito.

Si en la formula [A] $8t. : 4t. :: xv. : 16v$ damos por incognito el termino $4t$ y en vez de xv ponemos su valor $32v.$, sera $8t. : xt. :: 32v. : 16v.$ [B]; y quedaria reducida la cuestion á buscar los tejedores que trabajaràn 16v, en el supuesto de que 8t. han trabajado 32 varas. Donde se ve, que puesto que las 16 qué se han de tejer son menos que las 32 que se han tejido, tambien los tejedores que se buscan seran menos que los 8 conocidos; por consiguiente aqui buscamos un numero menor. Veamos en este caso que regla se ha de seguir en su planteo. Para ello permutemos la proporcion [B], y tendremos 32v : 16v. :: 8t : xt.; si la alternamos, sera 32v. : 8t. :: 16v. : xt. De estas dos proporciones se deduce que:

2.ª *Para plantear una regla de tres directa simple, cuando el termino incognito sea menor que el conocido de su especie, se hara esta proporcion:* el mayor de la 1.ª especie : es á cualquiera de los otros dos terminos :: como el termino que queda : es al incognito.

Cuestion 1.ª *Un correo gasta 10 dias en andar 120 leguas; ¿ Cuantos dias empleara en andar 360 leguas?*

Para hacerse cargo de los terminos de 1.ª y 2.ª especie, se escribiran los datos y el incognito del mismo modo que se enuncian, separandolos con comas de este modo; 10*d.*, 120*l.*, *xd.*, 360*l.* Despues de penetrarse bien de la cuestion, se observa que el numero de dias que buscamos es mayor que el conocido de su especie; porque á mas leguas mas dias se debe tardar el correo, y el planteo sera el siguiente: 120*l.* : 360*l.* :: 10*d.* : *xd.* $= \frac{360 \times 10}{120} =$ 30 *dias.*

179. *Escolio.* Como razon geometrica es lo mismo que quebrado, en que el numerador es el antecedente y el denominador el consecuente [159], se sigue que se la debera simplificar siempre que se pueda, dividiendo los dos terminos de la razon por un mismo numero. Asi la proporcion anterior, despues de simplificada, es 1*l.* 3*l.* :: 10*d.* : *xd.*

Cuestion 2.ª *¿ Cuantas mulas se necesitaran para trasportar de Abancay al Cuzco 606 arrobas de azucar, en el su-*

puesto de que 6 mulas trasportan 72 arrobas?

Escribo primero la cuestion conforme se me enuncia, del modo siguiente: $xm.$, $606a.$, $6m.$, $72a.$; y despues de observar que busco un numero mayor, hago el planteo que sigue: $72a. : 6m. :: 606a. : xm. = \frac{606 \times 6}{72} = 50$ *mulas* $+ \frac{36}{72}$ *de mula*, que simplificando es $50 + \frac{1}{2}$ mulas. Pero como no puede haber media mula, se sustituirá un borrico que cargue la mitad de la carga de una mula, ò tambien una mula pero que por estar flaca equivalga á la mitad de otra robusta.

Cuestion 3.ª *Si 2 dias tienen 48 horas ¿2 semanas cuantas horas tendran?* Aqui debo reducir las 2 semanas á dias, para que los terminos 2 dias y 2 semanas sean de una misma especie; hecho esto escribiremos asi; $2d.$, $48h.$, $14d$, $xh.$; y plantearemos como sigue: $2d. : 48h. :: 14d. : xh. = \frac{48 \times 14}{2} = 336$ *horas*

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA.

180. Despues de conocer que una regla de tres es *inversa*, *reciproca* ó indirecta, porque á medida que aumenta un numero, disminuye el otro y al contrario; tratemos de enseñar su planteo, resolviendo la siguiente:

Cuestion 1.ª *Se sabe que 3 caballos consumen en 4 dias 24 cargas de alfalfa; se pregunta ¿en cuantos dias consumiran 6 caballos las mismas 24 cargas?*

Resolucion. Como los 3 caballos comen cada dia, se sigue que el comer ellos en 4 dias equivale á tomar 4 veces los mismos 3 caballos, lo que da 12 caballos ò $3c. \times 4d.$; y como estos 12 caballos producen el efecto de consumir 24 cargas, tendremos esta ecuacion $3c. \times 4d. = 24$ *carg*; por el mismo raciocinio tendremos $6c \times xd. = 24$ *cargas*. En estas dos ecuaciones observamos que los dos primeros miembros son iguales al segundo 24 *carg.*; luego por el *axioma* 5 ° serán iguales entre sí, y nos darán la ecuacion $6c. \times xd. = 3c. \times 4d.$ [C], que puesta en proporcion, es $6c. : 3c :: 4d : xd.$ que alternando da $6c. : 4d. :: 3c. : xd = \frac{4 \times 3}{6} = 2$ *dias.* Observando ahora, que el numero de dias que buscamos es menor que los 4 dias conocidos, porque el numero 6 de caballos es mayor que el 4 de la misma especie; sacamos de las dos proporciones la siguiente regla:

1.ª *Para plantear una regla de tres inversa, cuando el numero incognito es menor que el conocido de su especie, se hara esta proporcion:* el mayor de la 1.ª especie: es á cualquiera de los otros dos terminos :: como el termino que queda: es al incognito.

Si en la formula (C) suponemos por incognito el factor 6c. y en vez de xd ponemos su valor 2d., tendremos esta ecuacion $xc. \times 2d. = 3c. \times 4d.$; si la ponemos en proporcion, sera $2d. : 4d. :: 3c. : xc$, que alternada, da $2d. : 3c. :: 4d. : xc. = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ *caballos.*

Como aqui buscamos un numero 6 de caballos que es mayor que el 4c. de su especie, observando las dos proporciones, deducimos la regla siguiente:

2.ª *Para plantear una regla de tres inversa, cuando el numero incognito es mayor que el conocido de su especie, se hara esta proporcion:* El menor de la 1.ª especie: es á cualquiera de los otros dos terminos :: como el termino que queda: es al incognito.

Cuestion 2.ª *Con 50 peones se concluye la obra de un edificio en 60 dias; ¿Con cuantos peones se acabara la misma obra en 15 dias?*

Es claro que para tardar menos dias, se requieren mas peones; por consiguiente la regla de tres es inversa, y el termino incognito es mayor. Escribiremos pues primero los datos y el incognito, segun se nos enuncian, de este modo: $50p.$, $60d.$, $xp.$, $15d.$, en donde los numeros $60d.$ y $15d.$ componen la 1.ª especie. El planteo es este $15p. : 60d. :: 50p. : xp = \frac{50 \times 60}{15} = 200$ *peones.*

Cuestion 3.ª *Un navio solo tiene viveres para 15 dias de navegacion; es necesario por ciertas circunstancias que la navegacion dure 20 dias; ¿ Cual ha de ser en este caso la racion diaria de cada navegante?*

Llamo 1 á la racion diaria, en el supuesto de que dure la navegacion 15 dias; pero como ha de durar mas dias, la racion debe ser menor; luego aqui á mas corresponde menos, y por lo mismo la regla de tres es inversa. Escribo los datos asi: $1r.$, $15d.$, $20d$, $xr.$, y despues de averiguar que el incognito es menor que el de su especie, haga el planteo siguiente: $20d. : 15d. :: 1r. : xr. = \frac{1 \times 15}{20} = \frac{3}{4}$ *racion.*

Cuestion 4.ª *En una plaza sitiada hay 800 soldados con viveres para 2 meses, dandoles cierta racion; ¿cuantos soldados han de salir de la plaza, para que los viveres bajo de la misma racion duren 5 meses?*

Es claro, que para que unos mismos viveres, bajo de una misma racion duren mas meses, debe haber menos soldados; luego á mas corresponde menos, y la regla de tres es inversa. Escribo la cuestion como se ve: $800s.$, $2m.$, $x\,s.$ $5m.$, y como busco menor numero de soldados, hago el planteo siguiente: $5m. : 2m. :: 800s. : xs. = \frac{800 \times 2}{5} = 320$ *soldados.*

Cuestion 5.ª *Supongamos que cuando vale la arroba de aguardiente de Ica 6 pesos, se venden 2 onzas por medio real; ¿ Cuantas onzas se venderan por medio real, valiendo la arrôba 10 pesos 4 reales?*

A' mas valor menos porcion se da por medio, y aqui se busca un numero menor. Escribo, *6p.*, *2on.*, *x on.*, *10p. 4r.* *Planteo*: *10p. 4r.* : *6p.* :: *2on.* : *x on.* $= \frac{2 \times 6.}{10p.\ 4r.} = 1 + \frac{1}{7}$ *onzas.*

REGLA DE TRES COMPUESTA.

181. En la regla de tres *compuesta* o *con tiempo* entran mas de tres numeros conocidos. En las cuestiones que se resuelven por esta regla concurren muchas causas á producir un efecto; para su inteligencia resolvamos la siguiente:

Cuestion 1.ª *Si 2 oficiales en 3 dias, trabajando cada dia 4 horas, hacen 24 cartucheras; ¿ 8 oficiales en 6 dias, trabajando cada dia 9 horas, cuantas cartucheras trabajaran?*

Resolucion. Como en cada dia hay 4 horas de trabajo, en 3 dias habra 3 veces 4 horas de trabajo ò *3d.* × *4h.* ò 12 horas; ahora, como los 2 oficiales trabajan en cada hora, se sigue que en 12 horas trabajarán 12 veces 2 oficiales; luego la espresion *3d.* × *4h.* × *2of.* equivale al numero de oficiales que trabajarian en una sola hora las 24 cartucheras. Haciendo el mismo raciocinio respecto de los 8 oficiales, 6 dias y 9 horas, resulta que *9h.* × *6d.* × *8of.* equivale à los oficiales que tambien en una hora trabajan las cartucheras que se buscan. Luego la cuestion anterior se puede reducir á esta: *Si 3d.* × *4h.* X *2 of.* = 24 *oficiales en una hora trabajan* 24 *cartucheras*; ¿ *9h.* X *6d.* X *8 of.* = 432 *oficiales cuantas cartucheras trabajaran en el mismo tiempo?* la que no es mas que una regla de tres simple.

Si llamàmos *concausas* à los numeros que tratan de aumentar la causa, como son en el ejemplo anterior los dias y las horas, *y coefectos* à los que aumentan el efecto; podemos fijar la regla siguiente:

Para plantear una regla de tres compuesta, se reducira primero a regla de tres simple, multiplicando entre si todas las concausas conocidas y tomando estos productos cada uno como *un solo numero ; y despues se vera si la regla de tres simple, que resulta, es directa o inversa.*

Segun esta regla plantearemos la cuestion anterior de este modo : 3 X 4 X 2 *of* : 24 *c.* :: 8 X 6 X 9 *of* : *x c.* $= \frac{8 \times 6 \times 9 \times 24}{3 \times 4 \times 2} = 8 \times 6 \times 9 = 432$ *cartucheras.*

182. *Escolio.* Aunque la regla acabada de dar sea buena para plantear todas las cuestiones semejantes â la 1.ª ; sin embargo, como puede haber en las cuestiones muchas concausas, y muchos coefectos, y ser el termino incognito una concausa, ò un coefecto, en estos casos se hallarian los principiantes muy embarazados en orden al planteo. Las reglas que dan los Autores, bien que esactas, son engorrosas y requieren mas que mediano talento en el calculador ; à mi parecer la que sigue carece de estos inconvenientes.

Regla general. 1.° *Hagase una ecuacion tal, que en el primer miembro se halle el producto de las concausas conocidas, y en el segundo el producto de los coefectos correspondientes;* 2.° *Pongase por denominador del primer miembro el producto de las otras concausas, y por denominador del segundo el producto de los otros coefectos correspondientes ;* 3.° *Multipliquese el numerador del quebrado, que no tiene incognita, por todo lo que multiplica a la incognita y borrese todo lo que multiplica a esta :* 4.° *Pongase la igualdad de quebrados en proporcion (160) y hallese el termino incognito.*

Cuestion 2.ª *Si 4 peones en 6 dias, trabajando cada dia 8 horas acaban un calcheo de maiz : ¿ Cuantos peones se necesitaran para acabar el mismo calcheo en 3 dias, trabajando cada dia 7 horas?*

Para hacerme cargo de la cuestion, la escribo en compendio de este modo : [4 *p.* , 6 *d.* , 8 *h.* , 1 (al calcheo llano 1)] [*xp.* , 3 *d.* , 7 *h.* , 1]. Despues observo que las primeras concausas son 4 *p.* , 6 *d.* , 8 *h.* y su efecto 1 ; las otras concausas son *xp.* , 3 *d.* , 7 *h.* y su efecto 1; supuesto esto, hago la siguiente ecuacion $\frac{4 \times 6 \times 8}{xp \times 3 \times 7} = \frac{1}{1}$;

Despues multiplico el numerador 1 por 3×7, y borro estos factores del lado de *xp* , lo que da $\frac{4 \times 6 \times 8}{xp} = \frac{1 \times 3 \times 7}{1}$:

Esta igualdad de divisiones indicadas trasformo en proporcion, trantando de que el termino incognito ocupe el ultimo lugar, de este modo : $1 \times 3 \times 7 : 1 :: 4 \times 6 \times 8 : xp. = \frac{192}{21} = 9 + \frac{1}{7}$ *peones*, despues de simplificar el quebrado.

Cuestion 3.ª *Se sabe que 2 yuntas de bueyes, en 5 dias, arando 6 horas cada dia, aran un terreno de 1000 brazas de largo y 200 de ancho; para que 4 yuntas de bueyes en 3 dias, arando 7 horas por dia aren un terreno de 1500 brazas de largo, ¿que ancho se le debera dar?*

Escribo primero en compendio la cuestion asi : (2 *y.*, 5 *d.*, 6 *h.*, 1000 *b. l.*, 200 *b. a.*] [4 *y.*, 3 *d.*, 7 *h.* 1500 *b. l.*, *xb. a.*]; despues observo que las primeras concausas son 2 yuntas, 5 dias, 6 horas, y sus coefectos correspondientes son 1000 brazas largo, y 200 ancho : que las segundas concausas son 4 yuntas, 3 dias, 7 horas, y sus coefectos correspondientes son 1500 brazas largo y *x* brazas ancho. Hecho esto, pongo la siguiente ecuacion :

$$\frac{2\,y \times 5\,d \times 6\,h.}{4\,y \times 3\,d \times 7\,h.} = \frac{1000\,b.\,l. \times 200\,b.\,a.}{1500\,b.\,l. \times x\,b.\,a.}$$

Multiplico despues el numerador del quebrado que no tiene incognita por 1500 *b. l.* y borro este factor del lado de la incognita *x b. a.*, lo que da, haciendo la operacion en abstracto, la ecuacion $\frac{2 \times 5 \times 6 \times 1500}{4 \times 3 \times 7} = \frac{1000 \times 200}{x\,b.\,a.}$,

y la proporcion $2 \times 5 \times 6 \times 1500 : 4 \times 3 \times 7 ::$

$$1000 \times 200 : x\, b.\, a. = \frac{1000 \times 200 \times 4 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 6 \times 1500} = \frac{1000 \times 2 \times 7}{5 \times 15} = \frac{200 \times 2 \times 7}{15} = \frac{40 \times 2 \times 7}{3} =$$

$\frac{560}{3} = 186 + \frac{2}{3}$ *brazas de ancho.*

Resulta del cálculo anterior, que el ancho pedido debe ser de 186 *brazas mas dos tercios de braza*; en dicho cálculo se prefiere el ir indicando las multiplicaciones y particiones, con el fin de simplificar los quebrados suprimiendo factores comunes.

Demostracion. El producto de las primeras concausas se divide por el producto de las segundas, para ver cuantas veces la reunion por via de multiplicacion de las primeras es mayor ò menor que la misma reunion de las segundas; y como cuanto mayor ò menor es el producto de las primeras concausas que el de las segundas, otro tanto mayor ó menor será el producto de los coefectos de aquellas que el de estas, resulta que estas divisiones indicadas, ò quebrados deben formar ecuacion. Si estos quebrados iguales se multiplican por un mismo numero, cual es el producto que multiplica à la incognita de un denominador, no se alterarà (*ax.* 6.°) la ecuacion; ahora, para multiplicar quebrados por un entero, solo se multiplican los numeradores, y se suprime el entero que està de denominador en el un quebrado; luego en dicha ecuacion solo se debe multiplicar el numerador del quebrado, que no tiene incognita, por todo lo que la multiplica, y suprimir esto en el denominador donde se halla. Como solo habia que dar razon de esto, pues lo demas ya esta demostrado atras, resulta L. Q. D. D.

REGLA CONJUNTA.

182. Se llama *regla conjunta* una proporcion, cuya primera

razon esta compuesta de dos ó mas razones, y la segunda es una razon simple: toma el nombre de *conjunta*, porque el resultado se halla por una sola regla de tres; pudiendose hallar por muchas. Su uso principal es reducir medidas, pesos y monedas estrangeros á los de un pais. Las cuestiones, que se resuelven por esta regla, se enuncian como la siguiente:

Cuestion 1.ª *Si 8 borricos valen 40 pesos, 5 pesos valen 10 carneros, 2 carneros valen 4 gallinas; ¿16 borricos cuantas gallinas valdran?*

Resolucion. Como cada genero es igual à su valor, se sigue que podremos formar tantas ecuaciones, como generos y valores correspondientes haya; luego tendremos las siguientes:

Ahora, una ecuacion no se altera, aunque se multipliquen ò partan sus dos miembros por un mismo numero (*ax* 6.º); luego el primer

(1.ª) $2b = 40p.$
(2.ª) $5p. = 10c.$
(3.ª) $2c. = 4\,g.$
(4.ª) $16b. = x\,g.$

miembro de la 1.ª ecuacion podemos multiplicar ordenadamente por el primero de la 2.ª y 3.ª, y el segundo miembro por el segundo de las mismas; porque esto no es mas que multiplicarlos por un mismo numero. Si ejecutamos dicha multiplicacion tendremos $8\,b. \times 5\,p \times 2c. = 40\,p \times 10\,c. \times 4g$; y si dividimos el primer miembro de esta ecuacion por el primero de la 4.ª y el segundo por el segundo (*se debe guardar este orden, porque se trata de ver cuantas veces las causas contienen a las causas y los efectos a los efectos*), no se alterará la ecuacion, y tendremos $\frac{8b. \times 5p. \times 2c}{16b.} = \frac{40p. \times 10c \times 4g.}{xg.}$;

pero la igualdad de divisiones indicadas es una proporcion, luego esta ecuacion sera la siguiente proporcion:

$8b. \times 5p. \times 2c. : 16b. :: 40p. \times 10c \times 4g. : xg.$ *o alternando*, $8b. \times 5p. \times 2c. : 40p. \times 10c. \times 4g :: 16b : x.g. = 320$ *gallinas.* (A).

Como la primera razon de la ultima proporcion es compuesta (159), la podemos descomponer en sus razones componentes, de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} 8\ b\ :\ 40\ p. \\ 5\ p.\ :\ 10\ c. \\ 2\ c.\ :\ 4\ g. \end{array}\right\} :: 16\ b.\ :\ x\ g. = 320\ \textit{gallinas}.$$

De este planteo, nos valdremos para deducir la regla siguiente:

Para plantear una regla conjunta, se escriben los generos formando razon con sus valores, de modo que el antecedente de la 2.ª razon sea homogeneo con el consecuente de la 1.ª; el antecedente de la 3.ª sea homogeneo con el consecuente de la 2.ª y asi en adelante, separando con un corchete todas estas razones; despues se escriben los cuatro puntos y luego la razon simple, cuyo antecedente debe ser homogeneo con el antecedente de la 1.ª razon componente, y su consecuente homogeneo con el consecuente de la ultima razon componente. Finalmente, se forma una sola proporcion, poniendo por 1.ª razon el producto de los antecedentes comparado con el producto de los consecuentes de las razones componentes, y por 2.ª la razon simple, segun se ve en la proporcion (A).

Escolio. En el planteo (A) se comparan entre si cantidades heterogeneas, como borricos con pesos, con corderos; esto no embaraza el cálculo, pues los numeros no los tomamos como concretos, sino como abstractos, y aunque lleven la letra inicial de su especie, es esto por claridad.

Cuestion 2.ª *Se sabe que* 50 *metros franceses equivalen a* 179 *pies españoles, y que* 699 *pies españoles equivalen a* 100 *toesas antiguas francesas; ¿* 380 *metros a cuantas toesas francesas equivaldran?*

$$\left.\begin{array}{l} 50\ m.\ :\ 179\ p. \\ 699\ p.\ :\ 100\ t. \end{array}\right\} :: 380\ m.\ :\ x\ t.$$

Despues de haber ordenado las razones, hago la proporcion siguiente: $50 \times 699 : 179 \times 100 :: 380 : x\ t. =$ 194, 6 &c. *toesas*.

REGLA DE COMPAÑIA.

183. *Regla de compañia es la que enseña a determinar la parte que corresponde de la ganancia o perdida a cada uno de muchos compañeros, que han puesto su caudal en un fondo, con proporcion a la puesta de cada uno.* Es de dos maneras *simple*, cuando los caudales de cada socio permanecen igual tiempo; y *compuesta o con tiempo*, cuando los caudales del fondo no tienen igual tiempo, como si el uno puso 50 pesos por un año y el otro 50 pesos por dos años. La compuesta se reduce à la simple, multiplicando cada puesta por su tiempo; asi las dos puestas anteriores se reduciran á igual tiempo, cual es el menor un año, multiplicando la 1.ª puesta 50 por 1 año y la 2.ª por 2 años, lo que da para esta 100 pesos; pues es claro que 50 pesos en 2 años equivalen á 100 pesos en un año. Entendido esto, resolvamos la siguiente:

Cuestion. *Pedro, Juan y Diego hicieron compañia en un fondo para comerciar: el 1.° puso 20 pesos, el 2.° dio 40 pesos y el 3.° puso 80, cuyas puestas sumadas hacen el fondo de 140 pesos; Con este principal han ganado 280 pesos; se pregunta ¿Que ganancia tocara a cada uno?*

Resolucion. Como cada unidad ò peso de los que forman los tres numeros ò puestas 20, 40, 80 pesos, son iguales; se sigue que tambien las ganancias de cada unidad seran iguales, y solo provendra la mayor ó menor ganancia que corresponde á cada puesta, del mayor ò menor numero de pesos que la componen: es decir, que si un peso gana un real, al que puso 20 pesos le tocarán 20 reales, al que puso 40 pesos le corresponderan 40 reales &c. Luego la cuestion queda resuelta con solo hacer dos operaciones: 1.ª Averiguar cuanto gana ò vale un peso, en el supuesto de que 140 pesos ganan ò valen 280 pesos; 2.ª Multiplicar el valor ò ganancia de un peso por cada una de los tres puestas 20, 40 y 80 pesos y el producto dará la ganancia respectiva.

Para saber el valor ó ganancia de un peso, sabiendo qne 140 pesos ganan 280, dividiremos (75. 4.° *uso*) el valor 280 *ganancia por* 140 *suma de las puestas*, lo que da $\frac{280\ g.}{140\ s.\ p.}$ *valor de un peso.*

Si ahora esta ganancia de un peso multiplicamos por cada puesta, v. g. por la primera 20, este producto nos dara la ganancia que toca al primer compañero; tendremos pues, (llamando x la ganancia buscada y poniendo una p al lado del 20 para demostrar que es una puesta) espresada dicha ganancia en la ecuacion: $\frac{280\ g. \times 20\ p.}{140\ s.\ p.} = x = 40$ *pesos.* (B)

De multiplicar el valor de un peso por cada puesta, resulta que á Pedro tocan 40 pesos; à Juan 80 pesos y á Diego 160 de ganancia, que sumados hacen 280 ganància total. De la espresion ultima deducimos la regla siguiente:

1.ª *Para sacar por una simple multiplicacion y division la ganancia o perdida, que corresponde a cada puesta en la regla de compañia; se multiplica la ganancia o perdida por cada puesta y el producto se divide por la suma de las puestas.*

Si en la ecuacion [B] multiplicamos ambos miembros por el denominador 140 $s.\ p$, para lo que le suprimimos en el quebrado, tendremos $280\ g \times 20\ p = 140\ s.\ p. \times x.$; que puesta la ecuacion en forma de proporcion [162], es $140\ s.\ p. : 280\ g. :: 20\ p. : x$; de donde inferimos que:

2.ª *Para determinar la ganancia o perdida que corresponde a cada puesta en la regla de compañia, se hara esta proporcion: La suma de las puestas: es a la ganancia o perdida :: como una puesta: es a la incognita x, que se hallara segun regla.*

Escolio. La cuestion antecedente, tambien se suele enunciar de esta manera: *Dividir el numero* 280 *en tres partes que tengan entre si la misma razon que las tres cantidades dadas* 20, 40, 80; *esto es, que la* 1.ª *tenga con la* 2.ª *la ra-*

con de 20 : 40 , *y la* 1.ª *con la* 3.ª *la razon de* 20 : 80.

Las cuestiones se escriben, poniendo las puestas unas debajo de otras, la ganacia ó perdida à la frente, y debajo de las puestas la suma de ellas, segun se ve á la margen.

$$\left.\begin{array}{ll} P. & 20 \\ J. & 40 \\ D. & 80 \\ \hline & 140 \end{array}\right\} 280 \text{ pesos.}$$

Cuestion 2.ª *Dos comerciantes hicieron compañia; el primero puso en el fondo* 200 *pesos y el segundo* 340. *Por cierta discordia se retira de la compañia el primero al cabo de* 5 *meses, y el segundo continua por un año: se halla que la ganancia al año cumplido es de* 635 *pesos; ¿cuanto corresponde a cada uno?*

Reduzco las puestas á un mismo tiempo, multiplicando la 1.ª por 5 meses y la 2.ª por un año ó 12 meses, de donde resultan 1000 pesos puesta del primero en un mes, y 4080 pesos puesta del segundo en el mismo mes. Despues sumo las puestas, lo que me da 5080, y hago las proporciones siguientes:

5080 : 635 :: 1000 : x = 125 *pesos, gananc. del* 1.º

5080 : 635 :: 4080 : x = 510 *pesos, gananc. del* 2.º

REGLA DE INTERES.

184. *Se llama interes aquella cantidad que se debe pagar a mas del principal, que una persona ha tomado por via de emprestito de otra.* Por lo comun se pagan 5 pesos por cada 100 ó el 5 por %, y en el comercio el 6. La regla que enseña á determinar este interes, dado el capital y el interes por %, se dice *regla de interes.* El interes que se debe pagar por solo el principal, se llama *interes simple*; pero se dice *interes compuesto*, el que se debe pagar por el capital y por el interes que no se pagó, entrando este en el mismo capital.

Problema. *Dado el capital, el interes por ciento al año y el numero de años, hallar el interes total simple.*

Resolucion. Multiplíquese el interes, que se da por ciento, por el numero de años que han corrido; el producto multipliquese por el capital, y de este producto sepárense de la derecha dos guarismos; el quebrado decimal propio ó impropio, que resulte, sera el interes total pedido.

Cuestion 1.ª *Un individuo 3 años ha, que presto* 2700 *pesos al 5 por* $\frac{0}{0}$; *¿A cuanto montaran los intereses?*

Multiplicaré 3 por 5, y el producto 15 multiplicaré por 2700, y de este producto, que es 40500, separo con la coma los dos ceros; lo que me da 405 pesos de interes, que agregados al capital 2700, se deberan cobrar 3105 por capital y ganancias.

Demostracion. Para pagar 5 pesos por cada 100 que haya en el capital 2700, es necesario averiguar primero cuantos cientos hay en dicho capital; lo que se consigue (75) dividiendo 2700 por 100, ò separandole con la coma decimal dos ceros de la derecha, y resulta 27,00 igual al numero de cientos que buscamos. Este numero debe ahora multiplicarse por el interes 5, lo que da 27,00 $\times$ 5 interes de un año; pero los años son 3, luego el interes de un año se debe tomar tres veces, por lo que 37,00 $\times$ 5 $\times$ 3 sera el interes total. Aqui observamos que el decimal está multiplicado por 5 $\times$ 3, ó por el producto que resulta de multiplicar el interes de cada ciento por el numero de años; y como para multiplicar decimales no se hace caso de la coma, sino que despues de haber sacado el producto, se separan de este los guarismos decimales que habia en los factores, resulta lo que debia demostrarse.

Escolio. Por regla de tres se sacaría el interes de un año, haciendo esta proporcion: *Si* 100 *en* 1 *año ganan* 5; ¿2700 *cuanto ganaran en el mismo tiempo?* y me salen 135 pesos de interes, que multiplicado por 3 años y agregado al capital, da el mismo resultado que antes. El calculador elejirá el metodo que le parezca mas facil, atendida la cuestion. Cuando el interes estè fijado á otro numero diferente del ciento, lo que no es comun; ó cuando el tiempo es de años y meses, ò de años y dias, sera mas ventajoso usar de la regla de tres, como se ve en la siguiente:

Cuestion 2.ª *El caudal de una viuda que es de 420 pesos, ha estado 2 años 5 meses al interes del 5 por ⁰⁄₀; se pregunta ¿Cuanto cobrara de intereses y capital?*

Buscaré primero el interes de un año por esta proporcion $100 : 5 :: 420 : x = 21$ pesos: para hallar el interes de los 2 años 5 meses digo: Si 420 pesos en 1 año ganan 21 pesos; los mismos cuanto ganarán en 2 años 5 meses? Hago la proporcion 1 *año* : 21 *pes.* :: 2 *an.* + 5 *mes.* :: $x =$ 50 *pesos y* 6 *reales.* Digo pues que cobrarâ de interes 50 pesos seis reales, que reunidos al capital montan 470 pesos 6 reales.

Interes compuesto.

185. Cuestion. *Un Ingles presto a un Arequipeño 400 pesos a redito del 5 por 100, con la condicion de que no pagando al año cumplido, los reditos se refundiran en el capital, verificandose lo mismo en los demas años. Se pregunta ¿cuanto pagara al cabo de 3 años por capital y el interes compuesto?*

Resolucion. Se debe advertir que el interes compuesto está prohibido por las leyes, sin embargo demos la regla. Para el primer año sáquese el interes simple (184) de los 400, que son 20 pesos. Para el 2.° sumo el capital con el interes simple del primer año, y de la suma 420 pesos saco su interes simple que es 21 pesos. Para el 3.° sumo el capital anterior 420 con su interes simple 21 pesos, y de la suma 441 saco el interes simple, que es 22,05 pesos. Finalmente sumo el ultimo capital 441 con el ultimo interes 22,05, y resultan 463,05 pesos.

Escolio. El capital y ganancias à interes compuesto tambien se puede hallar por esta regla : *Busquese primero el interes, que gana un solo peso al año, por medio de una regla de tres ; sumese despues el interes de 1 peso con el mismo peso, y hagase una multiplicacion tal, que aquella suma entre tantas veces de factor como años han pasado ; finalmente el producto que resulte multipliquese por el capital, y este producto sera la suma de capital y ganancias pedida.* Asi en la cuestion anterior el interes de 1 peso es 0, 05 ; este interes sumado con el peso da 1, 05: pongo ahora esta suma tres veces de factor, porque son 3 los años, de este modo : $1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 1,157625$, y este producto multiplico por el capital 400, de donde obtengo 463, 05 pesos el mismo resultado que antes.

La razon de esta regla consiste, en que como el interes de un peso en el primer año ha de ser capital en el segundo, podemos hacer esta proporcion : *Si por* 1 *peso en un año se paga* 1, 05 ; *¿por* 1 *peso* + 0, 05 *cuanto se pagara en el mismo tiempo?* ò $1 : 1,05 :: 1,05 : x = 1,05 \times 1,05$, donde vemos que el capital y ganancia que se debe por un peso al fin de los 2 años, es igual al producto que resulta de tomar 2 veces por factor la suma de un peso y su interes annual. Para el tercer año haremos la proporcion $1 : 1,05 :: 1,05 \times 1,05 : x = 1,05 \times 1,05 \times 1,05$ que es la suma de capital y ganancias que se cobrará por un peso al fin del tercer año, y en el cual resultado podemos hacer la misma observacion anterior. Ahora, para hallar la suma del capital 400 pesos y su interes al cabo de 3 años à interes compuesto, diremos : *Si* 1 *peso en* 3 *años da por capital y ganancias* $1,05 \times 1,05 \times 1,05$; *¿*400 *pesos cuanto daran?* que poniendo en proporcion sera el resultado el mismo que hemos prescrito en nuestra regla.

REGLA DE ALIGACION.

186. *Aligacion, liga o mezcla* es lo que resulta de entrevecar muchos generos de diferente naturaleza ó calidad, ò precio. *Regla de aligacion es la que enseña; 1.° a determinar el precio a que se ha de vender cada unidad de una mezcla, donde han entrado varias cantidades de diferente valor; 2.° a determinar en que proporcion se han de mezclar las cantidades de diferentes precios, para venderlas a un precio medio señalado.* Llamase *precio medio* el que es menor que un precio dado y mayor que otro; asi 6 pesos sera precio medio entre 10 y 4 pesos. Segun la definicion dada, la regla de aligacion se ocupa de dos casos; resolvamos el 1.° mediante la siguiente:

Cuestion. *Un panadero ha mezclado 10 fanegas de harina de a 6 pesos fanega con 4 fanegas de harina de a 3 pesos fanega; se pregunta ¿cual sera el precio medio de cada fanega de mezcla, sin perder ni ganar?*

Resolucion. La mezcla de 4 fanegas con 10 fanegas es $4f + 10f$; el precio de las 10 fanegas á 6 pesos es $10f. \times 6p.$ y el de las 4, á razon de 3 pesos fanega, es $4f. \times 3p.$ Ahora, como las unidades ò fanegas se han mezclado, se sigue que tambien se han mezclado sus precios; luego $10f. \times 6p. + 4f. \times 3p.$, mezcla de los precios, es el precio total de $10f + 4f$ mezcla de las unidades. Para hallar ahora el valor de cada una de las fanegas de mezcla, conocido el valor de todas, dividiremos (75-4.°) el valor de todas por la suma de las fanegas, que sera, llamando x el precio medio buscado, $x = \frac{10f.\times 6p. + 4f\times 3p.}{10f + 4f.} = 5$ pesos $+ \frac{1}{7}$ *de peso.*

Regla. *Para hallar el precio medio a que se ha de vender cada unidad de una mezcla, sabidos los precios de las cantidades que se mezclan: se dividira la suma de los precios de las cantidades par la suma de ellas.*

Antes de pasar al 2.° caso, antepondremos el siguiente:

187 Lema. *La diferencia de dos o mas productos, que tienen un factor comun, es igual a la diferencia de los otros fac.*

tores multiplicada por el factor comun.

Esplicacion. Sean los productos 5×2 y 3×2 que tienen el factor comun 2; voy à demostrar que su diferencia $5 \times 2 - 3 \times 2$ es igual á la diferencia $5 - 3$ de los factores 5 y 3 multiplicada por el factor comun 2, ó es igual á $(5 - 3) \times 2$.

Demostracion. Como el producto no es mas que una suma, tendremos que 5×2 sera lo mismo que $5 + 5$, y 3×2 lo mismo que $3 + 3$; luego la diferencia de estos productos se podra espresar de este modo $(5+5)-(3+3)$: si en esta espresion restamos cada parte del sustraendo de cada parte del minuendo, la suma de estas diferencias parciales sera igual à la diferencia de los todos, luego $(5 - 3) + (5 - 3)$ es la diferencia de los todos, ò productos; pero $(5 - 3) + (5 - 3)$ es lo mismo que $(5 - 3) \times 2$; luego *la diferencia*, &c. L. Q. D. D.

188. Cuestion 1.ª *Un Moqueguano tiene dos clases de vino, uno de a 9 pesos y otro de a 4 pesos por arroba. Quiere mezclar el vino para vender la arroba al precio medio de 7 pesos, sin perder ni ganar; ¿cuantas tomara del primero y cuantas del segundo?*

La cuestion se escribe, como se ve à la marjen.

$$7 \begin{cases} 9 & x \\ 4 & z \end{cases}$$

Resolucion. Llamemos x las arrobas que ha de tomar del vino que vale 9 pesos, y z las que ha de tomar del que vale 4 pesos. El precio total de las arrobas x antes de la mezcla es $x \times 9$, y el de las arrobas z, es $z \times 4$; como estas arrobas se han mezclado, tambien se han mezclado sus valores totales y la mezcla de valores es $x \times 9 + z \times 4$. Como cada arroba despues de la mezcla ha de valer 7 pesos, resulta que el valor total de las arrobas mezcladas sera $x \times 9 + z \times 4$; pero el valor total de las arrobas antes de mezclarse es igual al que tienen despues de mezcladas, por el supuesto de que no se quiere ganar ni perder; luego tendremos esta ecuacion de valores $x \times 9 + z \times 4 = x \times 7 + z \times 7$.

En esta ecuacion observamos, que la suma de dos cantidades es igual á la suma de otras dos; luego (169) podemos hacer con ellas la proporcion aritmetica siguiente: $x \times 9. x \times 7 : z \times 7. z \times 4$, ò por ser la proporcion aritmetica la igualdad de sustracciones indicadas, sera $x \times 9 - x \times 7 = z \times 7 - z \times 4$;

Si por el lema (187) sacamos fuera del parentesis el factor comun x en el primer miembro y el z en el segundo, tendremos $[9 - 7] \times x = [7 - 4] \times z$. Si esta igualdad de productos ponemos en proporcion, nos vendra:

$$x : z :: [7 - 4] : [9 - 7].$$

Traducida al lenguaje vulgar esta proporcion, nos dice: que la cantidad que se ha de tomar del genero de mayor precio : es á la que se ha de tomar del genero de precio menor :: como la diferencia entre el precio menor y el precio medio : es á la diferencin entre el precio mayor y el precio medio; ò que *dichas cantidades estan en razon inversa de la diferencia de sus precios con el precio medio.* Luego la ultima proporcion nos da la siguiente:

Regla. *Para saber las porciones que se han de mezclar de dos generos que tienen diferentes precios, para venderlos a un precio medio: se resta del precio mayor el precio medio, y la diferencia señalara las unidades que se han de tomar del genero que tiene precio menor; asi mismo se resta el precio menor del precio medio, y la diferencia determina las unidades que se deben tomar del genero de precio mayor.*

$$7\left\{\begin{matrix} 9 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix}\right.$$

De aqui es, que en la cuestion anterior restaremos del precio mayor 9 el medio 7, y la diferencia 2 pondremos al lado del precio menor 4; despues restaremos el precio menor 4 del precio medio 7, y su diferencia 3 colocaremos al lado del precio mayor 9. Concluiremos, pues, que del vino que vale 9 pesos la arroba, se tomaran 3 arrobas y del que vale 4 pesos, se tomarán 2 arrobas; de modo que las unidades que se toman del vino que vale mas y las que se toman del vino que vale menos, estan en la razon de 3 : 2, ó en la razon que resulte de multiplicar ó partir los dos terminos por un mismo numero, como 6 : 4, 24 : 16 &c.

Escolio. Cuando haya mas de dos generos de diferentes precios, el numero de los diferentes generos puede ser par como 4, 6, 8, ó ímpar como 3, 5, 7.

Si el numero de los diferentes generos es ímpar, necesariamente ha de haber tantos precios mayores ò menores que el precio medio, como generos hay menos uno: es decir, que si son v. g. 3 los generos, habra 2 precios mayores que el precio medio y el otro menor, ò 2 menores que el precio medio y el otro mayor. En este caso, se restan del precio medio todos los precios que son mayores ó menores que él, y las diferencias sumadas se ponen al lado del precio que es el menor ò mayor de todos: despues se ve la diferencia que hay entre el precio medio y aquel que es el mayor ò menor de los demas, y esta diferencia se pone al lado de estos. La razon es, porque esto es lo mismo que hacer la aligacion de dos en dos precios, uno que es el mayor ó menor de todos, y otro que es cada uno de los que quedan. Esto se aclarará con la siguiente:

Cuestion 2.ª *Un platero tiene oro de tres grados de finura: el 1.° es de 24 quilates, el 2.° de 23, y el 3.° de 18 quilates. Quiere hacer una mezcla de modo que el oro sea de 20 quilates; ¿Que partes pondra de cada clase?*

$$20\begin{cases}24 \text{ quilates} \ldots\ldots\ldots\ldots 2\\ 23 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\\ 18 \ldots\ldots\ldots 4 + 3 = 7\end{cases}$$

Veo la diferencia que hay entre el precio medio 20 y los dos precios superiores 24 y 23, y coloco la suma de sus diferencias 4 y 3 al lado del precio menor 18; hallo despues la diferencia entre el 18 y 20, y la resta 2 coloco á continuacion de los otros precios, como se ve á la margen.

Si el numero de precios es par, por ejemplo 4, necesariamente la mitad de ellos ha de ser mayor que el precio medio, y la otra mitad menor. En este 2.° caso se hace la regla de aligacion de dos en dos, á saber entre un precio mayor y otro menor que el precio medio, elijiendo los precios mayor y menor, que se quieran. Sea por ejemplo la siguiente:

Cuestion 3.ª *Hay cuatro clases de cacao, a saber de 20 pesos por arroba, de 16, de 11 y de 5 pesos: se quiere hacer una mezcla de todos para vender a 14 pesos la arroba, sin perder ni ganar; ¿Que porciones se tomaran de cada clase?*

Ejecuto la operacion, como se ve al lado, y hallo las porciones que se deben mezclar del 20 y el 5, y del 16 y el 11; ò del 20 y el 11, y del 16 y el 5;

$$14\left\{\begin{array}{l} 20\ldots\ldots9 \\ 16\ldots\ldots3 \\ 11\ldots\ldots2 \\ 5\ldots\ldots6 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \ldots\ldots3 \\ \ldots\ldots9 \\ \ldots\ldots6 \\ \ldots\ldots2 \end{array}$$

el resultado es, que por 9 arrobas del cacao de á 20, se han de tomar 3 del de á 16, 2 del de á 11 y 6 del de á 5 pesos; ó por cada 3 arrobas del de á 20 pesos, se han de poner 9 del de á 16, 6 del de à 11 y 2 del de á 5.

Escolio. A mas de las cantidades que se buscan para mezclar, se puede pedir que se forme una cantidad determinada de mezcla; en este caso se procede del modo que vamos á enseñar en la siguiente:

Cuestion 4.ª *Hay cacao de a 12 pesos arroba y de a 7; se quiere hacer una mezcla que se componga de 40 arrobas, para vender cada una a 9 pesos. ¿Que porciones se mezclaran de cada genero?*

Averiguo primero, segun regla general, las porciones que se han de tomar, que aqui son 2 del cacao superior y 3 del inferior; sumo

$$9\left\{\begin{array}{l} 12\ldots\ldots2 \\ 7\ldots\ldots3 \\ \hline 5 \end{array}\right.$$

despues estas cantidades, lo que me dà 5, y hago esta proporcion: Si en 5 de mezcla entran 2 del de a 12; ¿en 40 de mezcla cuantas entrarân? ò $5 : 2 :: 40 : x = 16$ *arrobas.*

Saco tambien las arrobas que debo tomar del cacao inferior, por esta proporcion, $5 : 3 :: 40 : x = 24$ *arrobas.*

Digo pues, que del que vale 12 pesos se deberan tomar 16 arrobas, y del que vale 7 se tomarán 24 arrobas, las que sumadas componen las 40 pedidas.

Escolio. Cuando se señala un numero fijo á uno de los generos, y se buscan las porciones que se le deben mezclar de otros, para venderlos á un precio medio; se resolverá la cuestion al modo que la siguiente:

Cuestion 5.ª *Hay 14 arrobas de cacao de a 12 pesos arroba; ¿cuantas arrobas se las mezclara del cacao de a 7 pesos arroba, para venderla a 9 pesos?*

Hallo primero, por regla general, las porciones 2 y 3 que debo tomar de cada clase, y hago esta regla de tres: si en 2 arrobas del de à 12 entran 3 del de à 7; en 14 arrobas del primero ¿cuantás entrarán del segundo? ò $2 : 3 :: 14 : x = 21$ *arrobas*, que se deben tomar del cacao de á 7 pesos.

La regla de aligacion se comprueba, viendo si la suma de los valores, que tienen las cantidades antes de la mezcla, es igual al valor que tienen las mismas despues de ella.

Omito otras muchas reglas, como de *falsa posicion*, *de Barata*, *de Averia &c*, que no son tan necesarias, y que todas se pueden solver con el buen manejo de la regla de tres. Pongo, pues, fin à la Aritmetica, ofreciendo mis trabajos al docil lector, porque con el indocil no quiero hablar; voy tambien á añadir en obsequio del primero el siguiente:

APENDICE.

MODO DE REPARTIR LOS DIEZMOS EN EL OBISPADO DEL CUZCO.

De toda la masa se saca ò resta la novena parte para la *Caja de consolidacion.* De lo que queda se sacan 200 pesos para la *Casa escusada:* lo que resta se divide por 9, y se saca el noveno para los *Novenos nacionales*; de lo que queda se deducen los *Gastos fijos*, como son sueldo de Contador, arrendamiento de sala, &c. De lo que queda, se saca al 3 por ciento para el *Colegio Seminario;* el remanente se divide en 16 partes iguales, que se distribuyen de este modo: 1.° Para la *Cuarta episcopal*, 4 y media partes; 2.° para la *Cuarta capitular*, 4 y media; 3.° Para los *cuatro novenos beneficiales*, 4 partes; 4.° para la *Fabrica*, una y media parte; 5.° para el *Hospital*, una y media parte.

Despues se reunen la cuarta capitular y los cuatro novenos beneficiales, y de esta suma se sacan los *Gastos fijos*, como son sueldos de sirvientes de Iglesia, Misas, &c. Lo que queda se distribuye entre los prebendados de este modo: divídase la cantidad en 475 partes iguales, y de estas tocan al Dean 150; á las Dignidades, 120: à los Canonigos, 100; á los Racioneros, 70 y à los medio-Racioneros, 35.

Advertencia 1.ª Si hay sillas vacantes, se sacan antes de las Misas sus cuotas respectivas, para aplicarlas à la Caja Nacional.

2.ª De lo que toca al Señor Obispo y Prebendados se deduce la *Cuota carolina*, que esta asignada en esta forma: al Señor Obispo, 400 pesos; al Dean, 70; á las Dignidades, 61 pesos 2 reales; á los Canonigos, 37 pesos 4 reales; á los Racioneros, 20 pesos; á los medio-Racioneros, 10 pesos.

Asi me ha instruido el actual Contador de Diezmos Don Jose Ruedas.

CORRECCIONES.

PAGINA.	LINEA.	DICE.	LEASE.
VII	12	*Cuado*	Cuando.
10	26	*Antepone*	Antepone ó pospone.
129	28	*El numero*	El menor.

En la pagina 42 linea 18, el período que empieza *Para formar* lease de esta manera: Para formar los factores compuestos de á *tres simples*, multiplíquense los factores simples de tres en tres, de cuantos modos se puedan. Los factores compuestos de *cuatro simples* se forman, multiplicando estos de cuatro en cuatro, de cuantos modos se puedan, y asi sucesivamente &c.

Los demas errores tipográficos se ha tenido por mejor correjirlos á mano, para evitar este trabajo á los Lectores.

NOTAS.

Proemio. Pag. IV. *El virrey Amat*, *&c.* El origen de los estudios matematicos en Lima proviene de un Religioso Mercedario, R. P. M. F. N. (su nombre calla Moreno en la vida de Lozano), varon de mucho nombre por su literatura sagrada y profana. El Conde de Alva de Liste, Don Luis Enriquez de Guzman, Virrey de Megico, llamò á dicho religioso que se hallaba en Lima, para que ocupara la Catedra de Matematicas en la Universidad de Megico: le acompañó en su viaje el joven Don Francisco Ruiz Lozano, discipulo suyo en Matematicas, quien con esta ocasion tubo mucha aceptacion ante el Virrey. Promovido el Conde al Vireynato del Perú, trajo en su familia á Lozano, y en 1657 fundó una Catedra de Matemáticas en el Hospital del Espiritu Santo, para la enseñanza de los Pilotos del mar del Sur, nombrando por Catedratico à dicho Don Francisco, que despues fuè General del mar del Sur. Este es el que observó antes que Hevelio el Cometa de 1660. A Lozano succedieron los siguientes.

Don Juan Ramon Koenig, presbítero Flamenco, capellan real y del Hospital del Espiritu Santo.

Don Pedro Peralta y Barnuevo, que aun vivia en 1730: *sujeto de quien no se puede hablar sin admiracion; porque apenas (ni aun apenas) se hallará en toda Europa hombre alguno de superiores talentos y erudicion. Sabe con perfeccion ocho lenguas, y en todas ocho versifica con notable elegancia .... Es profundo matematico, en cuya facultad o facultades logra altos creditos entre los eruditos de otras naciones; pues ha merecido que la Academia real de las ciencias de Paris estampase en su Historia algunas observaciones de Eclipses que ha remitido*, dice Feyjoo, tomo 4. Discurso 6.° *Españoles Americanos.*

Don Luis Godin. acadèmico Parisiense, de la compañia destinada á la medida de los grados en el Ecuador.

El Padre Juan Rher, Jesuita Hùngaro; destinado à las Misiones de los Mojos.

Don Cosme Bueno, medico de Lima, de la Sociedad Bascongada y de la Académia Matritense. Bajo la instruccion y direccion de este sabio puso en ejercicio el Virrey Amat la Catedra de Matemáticas fundada, mucho tiempo habia, por el Rey en la Universidad de S. Marcos, y la que hasta entonces estaba como dormida por falta de concurrentes, segun dice D. Gregorio Paredes (a). El Señor Amat dio á *esta Facultad la estimacion, que no tenia, ó por descuido de la atencion, o infelicidad de los tiempos, nacida del poco o ningun aprecio que se ha hecho de su utilidad, y del ningun ecsitativo a ella por falta de conocimiento (b).* Los dos actos públi-

---

(a) *Vida de* Moreno; *Almanaque Peruano de* 1810.
(b) *Certamen o Conclusiones Matematicas. bajo la instruccion de Don Cosme Bueno: en la Dedicatoria al Virrey.*

cos de Matematicas puras y ciencias militares, que presidio Don Cosme, fueron los primeros de su línea que vieron nuestras Aulas: desde entonces se debe contar la epoca fundamental de la introduccion de las Matematicas en la enseñanza pública. (c). Se debe, pues, concluir que la introduccion del cultivo de las ciencias esactas en el Perú se debe á Alva de Liste; pero su propagacion, su estimacion, y su publicidad al Señor Amat.

Don Gabriel Moreno que tomó posesion de la Catedra de prima en 1801, Cosmógrafo mayor del Perú, socio de la Académia Matritense. Fue discípulo de Don Cosme y Pasante de la Catedra de aquel; pocos le igualaron en el manejo de la lengua latina; se hizo apreciable por sus conocimientos botánicos á los comisionados de la *Flora Peruana*; el Dr. Don Hipólito Unánue, su discípulo, le dedicó la obra sobre las *Observaciones del clima*; Lima echó menos en 1809 al medico mas juicioso y caritativo.

El R. P. F. Francisco Romero, de la Religion de P. P. Agonizantes, dotado de buenos conocimientos de Historia natural.

El D. D. Gregorio Paredes, Cosmógrafo mayor del reyno, bastante conocido por su literatura.

Pagina VI. *En Arequipa promovio, &c.* A principios de este siglo, fue cuando el Dr. Dn. Francisco Luna Pizarro, presbítero y Catedratico de Filosofía del Colegio Seminario, iba diariamente á recibir lecciones del Padre Matraya, para darlas á sus discipulos, que entre otros tubo á Melgar. Don Tadeo Chavez discipulo de Melgar dictò la Filosofía y Matemáticas en aula privada ácia los años de 1816 y 17, á cuyas conferencias asistí varias veces, cuando yo dictaba Filosofía en el convento de la Merced. En 1819 dictò Baldivia en el convento de la Merced el curso de Filosofia y Matemáticas, que

---

(c) *Paredes, ubi supra.*

concluyó en 1821; de este curso salió Don Julian María Lopez, el primero que ha enseñado las Matematicas en Cochabamba. Despues de Baldívia dictó un curso elemental de Matematicas puras y mistas el P. L. F. Domingo Lopez del Castillo en el mismo convento, que lo comenzó en 1821 y lo concluyó en 1824. La Acadèmia Lauretana se instaló en 1821, y Chavez fue el primer Catedratico de Filosofía y Matematicas. Despues de Chavez entró Baldivia, y este mismo fué Catedratico de las mismas ciencias en el Colegio de la Independencia erijido en 1827 en el convento de Agustinos; de este curso salió Don Mariano Delgado fundador de la enseñanza de Matematicas en Puno.

Pàg. V. *A pesar de estas preocupaciones*, &c. Don Francisco Rodriguez dictó las Matemáticas en 1811 y 12, segun me han informado sus discípulos, que fueron los siguientes: *Don Juan Bautista Zubiaga, Miguel Tudela, Matias Carrasco, Buenaventura Aliaga, Pantaleon Montoya, Mariano Bargas, Gavino Jauregui, Jose Tejada, Gaspar Rosas, Lucas Rosas, Antonio Torre, Santos Cortes, Calisto Monteagudo, Santos Monteagudo, Pablo Florez, Rafael Silva, Jose Maria Olachea, Andres Castillo, Manuel Echenique, Fermin Figueroa, Rafael Figueroa, Aniceto Moscoso, Miguel Alvarez.* Al ecsamen Matematico asistieron de Examinadores el Señor Vidaurre, el Señor Pardo, y otros.

Se entabló de nuevo el curso Matematico, en el convictorio reformado de San Bernardo bajo su Rector Dr. D. Miguel Orosco, y se le dio principio el 23 de Junio de 1823. Los primeros discípulos, que dieron examen de Aritmetica y Algebra en † 25 de Julio de 1825, fueron *Don Miguel Ugarte, Manuel Teran, Pedro Celestino Florez, Jose Cardenas, Carlos Tejada, Jose Rolando, Pedro Ledo, Antonio Castro, Telesforo Guzman, Jose Calderon, Francisco Molina, Bernardo Galdos, Pedro Montesinos, Jose la Puerta, Manuel Zea, Ma-*

† 14 de Oct.e

nuel Campero, *Jose Balderrama*. El ecsamen fue ante el Señor Prefecto del Departamento, actual Presidente de la República, siendo examinadores D. José Matias Leon, y muchos Militares inteligentes.

Por el ecsamen de Geometría elemental, Trigonometria rectilinea y Geometria practica dado en 25 de Julio de 1826, llevaron el premio de una medalla de oro, que tenia en el anverso esta inscripcion *Premio* y al pie un compaz abierto, los siguientes: *Don Pedro Celestino Florez*, *Jose La-Puerta*, *Miguel Ugarte*, *Jose Rolando*, *Manuel Zea*, *Pedro Montesinos*. El ultimo ecsamen de Trigonometría esferica, Aplicacion del Algebra à la Geometría, tres secciones cónicas y Geografía en sus tres partes, fue el 7 de Diciembre de 1826. Abrio otro curso Matematico el mismo Catedratico, y un pasante Don Miguel Ugarte daba las lecciones de Aritmética, mientras aquel enseñaba la Mecanica, cuyo examen se dio en Octubre de 1827, y el ultimo de Geografía que completaba el curso iniciado, el 3 de Octubre de 1829. Se puso en receso esta noble ciencia, siendo Rector el Cura D. D. Carlos Gallegos, hasta el 9 de Mayo de 1831, en que por orden del Señor Presidente Gamarra, se volvio á cultivarla. Precedieron oposiciones, y optò la Catedra el D. D. Pedro Celestino Florez que actualmente la desempeña con contraccion y aplauso.

Pag. 95. *Nota. El peso duro vale .... un real de plata del Peru vale 85 maravedises.*

En las cuentas que forman los Contadores de Hacienda Nacional, dividen al real de plata nuestro en 34 maravedises, los mismos que tiene el real de vellon; pero en este caso los maravedises del real del Perù deben ser mayores que los del real de Vellon. La Ley 4.ª de la Recopilacion de Indias, Libro 4, título 24, dice: *Ordenamos, que el real de plata que se llevare de estos Reynos de Castilla o labrare en los de las Indias, valga en ellas 34 maravedis y no mas, que tienen de* *ley y valor , segun y como vale en estos reynos de Castilla.* Segun esta ley , el real de plata , que vale en Indias 34 maravedis , ha de ser identico al de Castilla.

ADICION.

En la pag. 2.ª á la linea 5.ª Añádase esta definicion: *Cantidad continua es la que tiene sus partes enlazadas en la realidad , o en nuestro modo de concebir*; asi es una pared , cuyas piedras estan trabadas realmente ; un batallon , cuyos soldados los consideramos como trabados.

INDICE.

PARTE 2.ᴬ

FIN DE LA ARITMETICA.

Junio 16 *de* 1832.

ADVERTENCIA.

Los que estan hechos al estilo del Dorado Contador, de Corachan, *y otros, mirarán con ceño los signos matematicos, que en esta obra se usan á menudo. Pero deben advertir, que los signos iluminan mucho al calculador: le guian como por la mano al fin que pretende; y á mas de esto es tan facil su manejo, que aun las niñas de las Educandas de esta capital con facilidad lo han adquirido, segun he visto en los varios ecsamenes de Aritmética, que han presentado.*

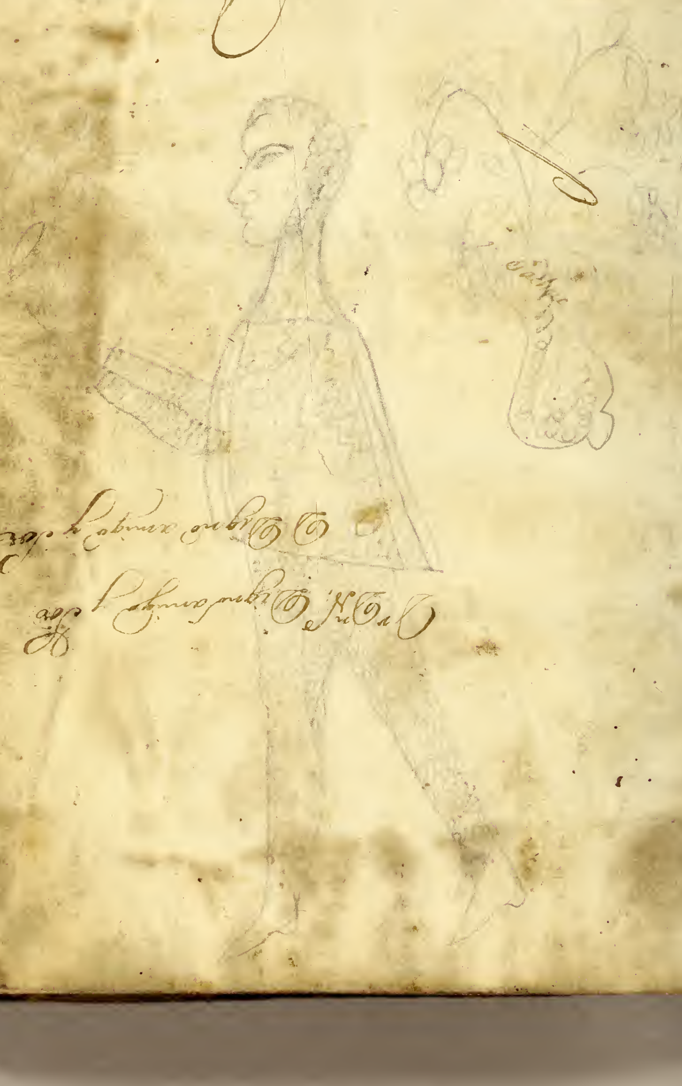
Vu fragerville

13-169

Dame un punto fijo fuera de la tierra, y la moveré Bernardino
Archìmedes.

Sor. Serma. Suerra D. Pedro Corich
Jer. Dor. S

Soy



Dr Dn N. Digno amigo y Sor

D Digno amigo y Sor

Fach.